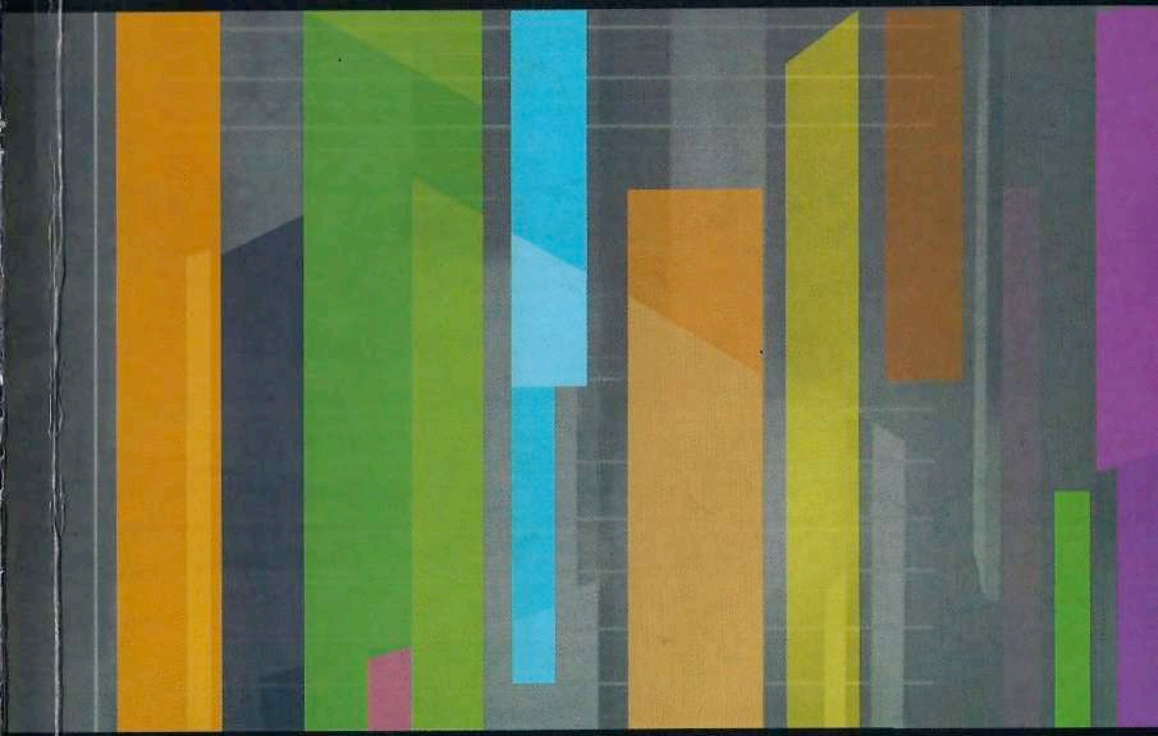
# La FÍSICA como segunda lengua

## Enfocado a la solución de problemas con cálculo

Barrett



LIMUSA WILEY

# *LA FÍSICA COMO SEGUNDA LENGUA*

# *LA FÍSICA COMO SEGUNDA LENGUA*

## Enfocado a la solución de problemas con cálculo

**THOMAS BARRET**
*Ohio State University*

LIMUSA WILEY

Barret, Thomas
*La física como segunda lengua : enfocado a la solución de problemas con cálculo* = Introductory physics with calculus (As a second language) / Thomas Barrett. -- México : Limusa Wiley, 2011
viii, 256 p.: il.; 23 x 15.5 cm.
ISBN: 978-607-05-0308-5
Rústica

**1. Física 2. Cálculo 3. Físicomatemáticas**
I. Palacios Martínez, J. Roberto, tr.
II. Jiménez Domínguez, Rolando V., rev.

Dewey: 530.155 I 22 / B2741f LC: QC20.6

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA PUBLICADA ORIGINALMENTE EN INGLÉS POR JOHN WILEY & SONS, CON EL TÍTULO:

INTRODUCTORY PHYSIS WITH CALCULUS
(AS A SECOND LANGUAGE)

© JOHN WILEY & SONS, INC.

CON LA COLABORACIÓN EN LA TRADUCCIÓN DE:
J. ROBERTO PALACIOS MARTÍNEZ
OCEANÓLOGO, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA.

REVISIÓN TÉCNICA:
ROLANDO V. JIMÉNEZ DOMÍNGUEZ
DOCTOR EN CIENCIAS. CATEDRÁTICO E INVESTIGADOR. TITULAR EN EL CENTRO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS, ADMINISTRATIVAS Y SOCIALES (CIECAS), DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL.

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

LA FÍSICA COMO SEGUNDA LENGUA. ENFOCADO A LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON CÁLCULO

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 2011, EDITORIAL LIMUSA, S. A. DE C. V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C. P. 06040
(55) 51 30 07 00
01 (800) 706 91 00
(55) 55 12 29 03
limusa@noriegaeditores.com
www.noriega.com.mx

CANIEM Núm. 121

PRIMERA EDICIÓN

HECHO EN MÉXICO

ISBN: 978-607-05-0308-5

# *CONTENIDO*

Prefacio **vii**

**CAPÍTULO 1** *CÓMO APRENDER FÍSICA* **1**

1.1 Los pecados capitales **1**
1.2 Las virtudes cardinales **3**
1.3 Unidades **4**

**CAPÍTULO 2** *ACELERACIÓN CONSTANTE* **6**

2.1 Aceleración y velocidad **6**
2.2 Aceleración constante **8**
2.3 Vectores **18**
2.4 Movimiento balístico **23**

**CAPÍTULO 3** *FUERZAS* **30**

3.1 Diagramas de cuerpo libre **30**
3.2 Resolución de $F = ma$ **46**

**CAPÍTULO 4** *FUERZAS: SUS EFECTOS* **56**

4.1 Fuerzas de fricción **56**
4.2 Trayectorias circulares **73**

**CAPÍTULO 5** *ENERGÍA* **84**

5.1 Energía y trabajo **84**
5.2 Energía potencial **89**
5.3 Uso de la conservación de la energía **99**

**CAPÍTULO 6** *CANTIDAD DE MOVIMIENTO* **106**

6.1 Cantidad de movimiento e impulso **106**
6.2 Cantidad de movimiento y choques **107**
6.3 Impulso y fuerza **111**
6.4 Choques elásticos **114**
6.5 Aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento **118**

**CAPÍTULO 7** *ROTACIÓN* **125**

7.1 Aceleración angular constante **125**
7.2 Relación entre movimiento angular y movimiento lineal **130**
7.3 Momento de torsión y momento de inercia **134**
7.4 Energía y movimiento giratorio **145**

7.5 Cantidad de movimiento angular e impulso angular **148**
7.6 Estática **152**

**CAPÍTULO 8** *CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS* **160**

8.1 Fuerzas eléctricas **162**
8.2 Campos eléctricos **168**
8.3 Fuerzas magnéticas **176**
8.4 Campos magnéticos **181**

**CAPÍTULO 9** *MÁS SOBRE CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS* **189**

9.1 Ley de Gauss* **190**
9.2 Ley de Ampere* **197**
9.3 Corrientes inducidas **202**

**CAPÍTULO 10** *POTENCIAL = VOLTAJE* **211**

10.1 Determinación del potencial **212**
10.2 Uso del potencial **221**

**CAPÍTULO 11** *CIRCUITOS* **228**

11.1 Resistores y capacitores **228**
11.2 En serie y en paralelo **232**
11.3 Circuitos con una sola batería **237**
11.4 Reglas de Kirchhoff **242**
11.5 Circuitos combinados: R-C y R-L **247**

# *PREFACIO*

Seguramente usted habrá leído el libro de texto de su curso de física, e incluso habrá asistido a clases. Ahora necesita saber cómo se resuelven los problemas.

Aprender física es como aprender una segunda lengua, pero ciertamente una lengua fácil, como el inglés. Supongamos que el lector intenta aprender inglés. Uno de los pocos aspectos difíciles de este idioma son los verbos irregulares. En el caso de los verbos regulares basta con aprender el verbo en infinitivo; todos ellos siguen las mismas sencillas reglas de conjugación en persona, en modo y en tiempo. Pero los verbos irregulares deben ser memorizados en sus tres tiempos.

La buena noticia es que la física no tiene verbos irregulares. La solución a cada problema de física se ajusta a un patrón preestablecido. Aprender el patrón es mucho más fácil que aprender cada verbo, o cada problema, de manera individual.

Por desgracia, muchos estudiantes de física tratan de aprender los problemas individuales en lugar del patrón. Esto es equivalente a aprender una segunda lengua mediante un libro de frases hechas. Si el lector desea aprender física de esa manera, este libro no es para usted. Este libro trata sobre patrones, un número reducido de técnicas que pueden ser aplicadas para resolver una variedad de problemas.

Por fortuna, aprender y seguir el patrón no es más difícil que aprender cada problema individualmente.

CAPÍTULO 1

# CÓMO APRENDER FÍSICA

Bienvenido a la física. No es tan mala como parece, en serio.

El objetivo de estudiar física es aprender pocas cosas que siempre se cumplen, para después aprender a usarlas en muchas situaciones. Esto es mucho más fácil que aprender muchas cosas que sólo a veces se cumplen.

## 1.1 LOS PECADOS CAPITALES

Todos los maestros de física han visto a los estudiantes hacer muchas cosas mal. La siguiente lista se encuentra lejos de ser exhaustiva, y por supuesto no todos los maestros de física coincidirían en que estos puntos son los más comunes o los más importantes.

- Esperar que cada problema se resuelva con una ecuación.
- Usar (mal) problemas de muestra.
- Tomar atajos.

**EJEMPLO**

Juan saca del auto las compras del supermercado. Puede llevar dos bolsas en la mano izquierda y tres en la derecha. ¿Cuántas bolsas llevará en cuatro vueltas?

En cada vuelta puede llevar

$$R = R_{\text{izquierda}} + R_{\text{derecha}}$$

$$R = (2 \text{ bolsas/vuelta}) + 3 \text{ bolsas/vuelta})$$

$$R = 5 \text{ bolsas/vuelta}$$

En cuatro vueltas puede llevar

$$N = RT$$

$$R = (5 \text{ bolsas/vuelta}) + (4 \text{ vueltas})$$

$$N = 20 \text{ bolsas}$$

Sería posible deducir y memorizar una fórmula para el ejemplo anterior: $N = (R_{\text{izquierda}} + R_{\text{derecha}})T$. Sin embargo, sería descabellado tratar de aprender una ecuación como ésta para cada problema posible. ¿Fue muy difícil resolver el problema en dos pasos?

**EJEMPLO**

Un conserje tarda $\frac{1}{3}$ de hora en limpiar un salón de clases. Cada noche debe limpiar 16 salones. ¿Cuántos salones limpia en una semana de trabajo de cinco días?

Con base en el ejemplo previo,

$$N = RT$$

noches $N = 5$

salones $R = ?$

tiempo $T = \frac{1}{3}$

De modo que

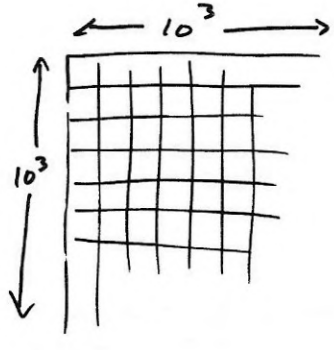
$$N = RT$$
$$5 = R\frac{1}{3}$$
$$R = 15$$

Hacemos votos para que el lector advierta que 15 no es la respuesta correcta. El error consiste en tomar una ecuación fuera de contexto, lo cual suele ocurrir cuando la fórmula corresponde a un problema distinto.

La finalidad de cada problema de física que se presenta como ejemplo es enseñar una lección, más que mostrar cómo se resuelve un problema. Si este último fuera el objetivo, entonces el lector sólo podría aprender una sola cosa de cada problema. Dado que el verdadero objeto es mostrar al lector cómo funciona una técnica, lo aprendido puede aplicarse a muchos problemas.

**EJEMPLO**

¿Cuántos metros cuadrados hay en un kilómetro cuadrado?



El prefijo *kilo-* significa mil, así que $1\ km^2 = 1000\ m^2 = 10^3\ m^2$, ¿correcto? Incorrecto. He visto a excelentes estudiantes hacer esto. El error es que no realizan el proceso completo.

$$(1\ km^2)\left(\frac{10^3\ m}{1\ km}\right)^2 = 10^6\ m^2$$

¿Existen atajos para resolver problemas de física? En ocasiones, pero es necesario resolver unas docenas de problemas similares antes de ser capaz de reconocer cuándo se aplica un atajo y cómo usarlo.

*LECCIÓN*

El flojo y el mezquino andan dos veces el camino.

## 1.2 LAS VIRTUDES CARDINALES

El objetivo de la física es conjuntar dos (o más) pasos sencillos para llegar a una conclusión a la que no se podría llegar de otra manera.

Esto es tan importante para el estudio de la física que hay que repetirlo. La solución de cualquier problema de física es una serie de pasos, cada uno de los cuales es lo suficientemente corto para que pueda comprenderse sin dificultad. La suma de todos estos pasos lleva a una respuesta. Lo hacemos todo el tiempo al conducir un automóvil. Lo más probable es que no haya un solo camino que conecte dos ciudades muy alejadas entre sí (digamos, separadas por más de mil kilómetros). Tal vez no podamos viajar directamente de A a D, pero de seguro habrá un camino de A a B, de ahí a C y, finalmente, de C a D. No nos extrañaría encontrar algunas curvas, ni esperaríamos que cada ciudad estuviera unida con todas las demás por un solo camino. Las instrucciones para ir de A a D son similares a los pasos que hay que seguir para resolver un problema de física: "use la conservación de la cantidad de movimiento para encontrar la velocidad del bloque de madera, luego use la aceleración constante o la conservación de la energía para determinar la altura que alcanza".

**EJEMPLO**

Una bombilla incandescente normal cuesta 0.25 de dólar y consume 60 watts de electricidad. Una lámpara fluorescente compacta (FC) cuesta 3.50 dólares y consume 14 watts de electricidad. Si el lector paga \$0.10 por kilowatt-hora (un watt durante mil horas), ¿en cuánto tiempo el costo de usar la lámpara FC pasa a ser la mitad del costo de la bombilla incandescente?

La energía eléctrica empleada por la bombilla incandescente (en kilowatts-hora) es

$$E = (60\ W)\left(\frac{1\ kW}{1000\ W}\right)(t)$$

Observe que $t$ y $E$ no son sólo números, sino que también tienen unidades (por ejemplo, $t = 24$ h). El costo de esta electricidad es

$$\$ = (E)(\$0.10/kWh)$$

y el costo total de la bombilla incandescente es

$$\$_i = \$0.25 + (60\ \text{W})\left(\frac{1\ \text{kW}}{1000\ \text{W}}\right)(t)\ (\$0.10/\text{kWh})$$

De modo similar, el costo de la lámpara fluorescente compacta es

$$\$_{FC} = \$3.50 + (0.014\ \text{kW})(t)(\$0.10/\text{kWh})$$

Deseamos que el costo de la lámpara FC sea la mitad del de la bombilla,

$$\$_{FC} = \frac{1}{2}(\$_i)$$

de modo que

$$\$3.50 + (0.014\ \text{kW})(t)(\$0.10/\text{kWh}) = \frac{1}{2}[\$0.25 + (0.060\ \text{kW})(t)(\$0.10/\text{kWh})]$$

$$\$3.375 = (0.0016\ \text{kW})(t)(\$0.10/\text{kWh})$$

$$3.375 = \left(0.0016\ \frac{\text{kW}}{\text{kWh}}\right)t$$

$$t = \frac{3.375}{0.0016}\ \frac{\text{kWh}}{\text{kW}} = 2109\ \text{h}$$

Esto equivale a unas 5.75 horas cada día durante un año. La lámpara fluorescente compacta puede parecer costosa, pero si se deja encendida una luz todas las noches, el costo de la electricidad ahorrada compensa con creces el costo inicial más alto.

*LECCIÓN*

Muy a menudo se requiere más de un paso para resolver un problema.

## 1.3 UNIDADES

Las unidades son importantes. En verdad. Existe una gran diferencia entre disponer de 60 minutos para resolver un examen y contar con 60 segundos para terminarlo. Las unidades al final siempre serán las adecuadas si el problema está bien resuelto.

**EJEMPLO**

¿Cuánto tiempo se requiere para conducir 120 millas a 60 mph?

La distancia es velocidad por tiempo, así que

$$t = \frac{d}{v} = \frac{120}{60} = 2$$

y el tiempo se mide en segundos, de donde $t = 2$ s. Con suerte el lector ha advertido que esto es incorrecto. La solución correcta es

$$t = \frac{d}{v} = \frac{120 \text{ mi}}{60 \text{ mi/h}} = \frac{120 \text{ mi}}{60} \frac{\text{h}}{\text{mi}} = 2 \text{ h}$$

**EJEMPLO**

Un automóvil deportivo acelera del reposo hasta 60 mph en 6.0 segundos. ¿Cuál es su aceleración?

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 \text{ mi/h}}{6.0 \text{ s}} = 10 \frac{\text{mi}}{\text{h s}}$$

La rapidez del automóvil aumenta en 10 millas por hora cada segundo.

*LECCIÓN*

No pierda de vista las unidades.

CAPÍTULO **2**

# *ACELERACIÓN CONSTANTE*

Comenzaremos tratando de describir el modo en que se mueven los objetos. Reservaremos para más tarde la pregunta de por qué se mueven de ese modo.

## 2.1 ACELERACIÓN Y VELOCIDAD

Empecemos por describir el movimiento más simple posible. ¿Por qué? Considere un ejemplo complicado: escriba la ecuación que describe la posición de un carro de montaña rusa en términos del tiempo. $x(t) = x_0 + ....$ Este..., ¿y si mejor volvemos al movimiento simple?

Lo más simple que un objeto podría hacer es nada, tan sólo permanecer inmóvil. Esto no es especialmente emocionante, pero a veces sucede. Y es muy fácil de describir. En particular, si un objeto nunca se mueve, es muy sencillo describir dónde ha estado y dónde va a estar.

La siguiente cosa menos interesante que un objeto podría hacer es moverse con velocidad constante. La **velocidad** indica la celeridad con que cambia la posición del objeto. La velocidad difiere de la rapidez en que tiene dirección y sentido, además de magnitud (tamaño). Una velocidad negativa indica que el movimiento ocurre en el sentido opuesto al de una velocidad positiva, pero en ambos casos la rapidez es positiva porque carece de dirección y sentido.

Puesto que la velocidad es la celeridad con la que cambia la posición, podemos escribir

$$v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{x - x_0}{t} \quad \text{o} \quad x = x_0 + vt$$

En palabras, esto quiere decir que el cambio de posición es la celeridad con la que esa posición cambia multiplicada por el tiempo durante el cual cambia, y que la posición final es la posición inicial más el cambio.

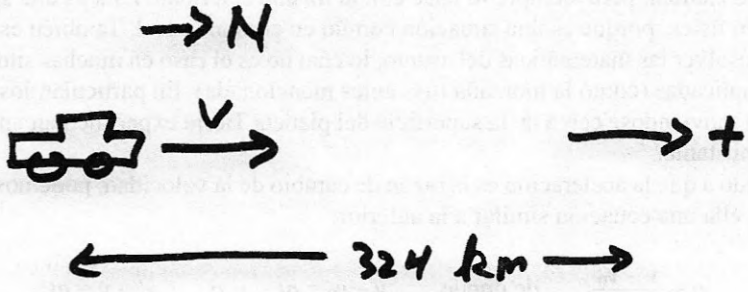
No todos utilizan la misma notación, por lo cual enseguida se presentan formas equivalentes de expresar lo mismo:

| Final | Inicial | Ecuación |
|---|---|---|
| $x$ | $x_0$ | $x = x_0 + vt$ |
| $x'$ | $x$ | $x' = x + vt$ |
| $x_f$ | $x_i$ | $x_f = x_i + vt$ |
| $x_{después}$ | $x_{antes}$ | $x_{después} = x_{antes} + vt$ |
| $x_B$ | $x_A$ | $x_B = x_A + vt$ |
| cambio = $\Delta x$ o $s$ | | $\Delta x = vt$ |

Yo tengo una fuerte preferencia por la última notación: $\Delta x = vt$. Veremos por qué en la siguiente sección.

**EJEMPLO**

Un automóvil recorre 324 km al norte en tres horas. ¿Cuál es su velocidad (que se supone constante)?




$$\Delta x = vt \qquad \text{de donde} \qquad v = \frac{\Delta x}{t}$$

Siempre que en una ecuación aparece algo con dirección y sentido —como el desplazamiento o la velocidad—, puede ser positivo o negativo. La pregunta es si $\Delta x$ es 324 km o – 324 km. Debemos elegir. Los sistemas de coordenadas (ejes) no existen en la naturaleza, sino que son tan sólo un recurso matemático, por lo que debemos elegir si la dirección norte es positiva o si lo es la dirección sur. Sin embargo, una vez que hemos elegido, debemos apegarnos a nuestra elección en todo el problema.

A falta de algo mejor, y para evitar los números negativos, elijamos la dirección norte como la positiva. Entonces el desplazamiento $\Delta x$ es +324 km, y

$$v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{324 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 108 \text{ km/h}$$

Si hubiéramos elegido la dirección sur como la positiva,

$$v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{-324 \text{ km}}{3 \text{ h}} = -108 \text{ km/h}$$

Así que el automóvil tiene una velocidad de 108 km/h en la dirección norte o – 108 km/h en la dirección sur. Debemos coincidir en la magnitud absoluta de la velocidad, sin importar las coordenadas que elijamos, aunque varíe el signo.

*LECCIÓN*

Podemos usar cualquier sistema de coordenadas o ejes que elijamos, pero habrá que usar el mismo para todo el problema.

Si la velocidad cambia, llamamos **aceleración** a ese cambio. Si un automóvil aumenta su velocidad, acelera; si la disminuye, acelera; si toma una curva, acelera. Podría sonar extraño que disminuir la velocidad es acelerar, pero la aceleración es *cualquier* cambio de velocidad. Cuando un automóvil toma una curva, es posible que su rapidez permanezca igual, pero su dirección cambia; así que la velocidad cambia y por lo tanto hay una aceleración.

La siguiente cosa un poco más complicada que un objeto puede hacer, después de moverse a velocidad constante, es presentar una aceleración constante. Es decir, la velocidad cambia, pero siempre lo hace con la misma celeridad. Ésta es una situación común en física, porque es una situación común en el mundo real. También es bastante fácil resolver las matemáticas del asunto, lo cual no es el caso en muchas situaciones más complicadas (como la montaña rusa antes mencionada). En particular, los objetos que caen moviéndose cerca de la superficie del planeta Tierra experimentan una aceleración constante.

Debido a que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad, podemos encontrar para ella una ecuación similar a la anterior:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \qquad \text{de donde} \qquad v - v_0 = at \qquad \text{o} \qquad v' - v = at$$

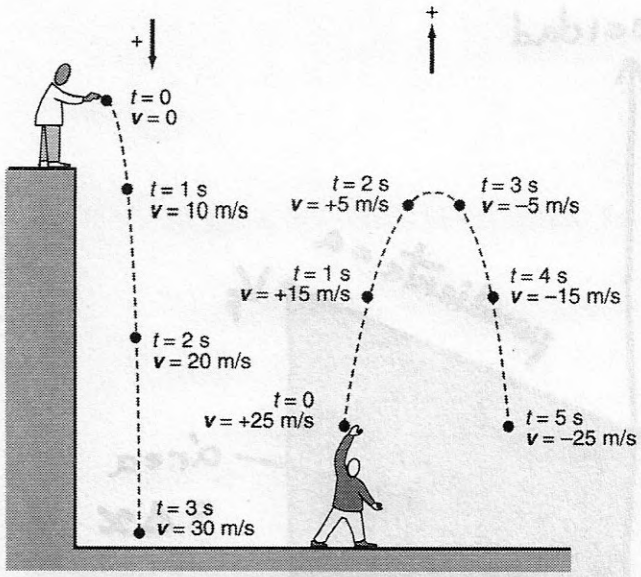
Cuando la aceleración y la velocidad tienen sentidos opuestos, el objeto frena o "desacelera". También se trata de una aceleración, porque la velocidad cambia. Si la aceleración permanece opuesta a la velocidad, el objeto puede detenerse e invertir el sentido de su desplazamiento. En el punto de retorno, la velocidad se hace momentáneamente cero, pero *sigue cambiando* y por lo tanto la aceleración no es de cero.

Las unidades de aceleración podrían parecer extrañas. La unidad de posición o desplazamiento es una longitud, por lo general en metros (m). La unidad de cambio de desplazamiento o cambio de posición también es una longitud. La unidad de velocidad es el cambio de posición en el tiempo, o longitud sobre tiempo, por ejemplo, metros sobre segundo (m/s). Una velocidad de 3 m/s significa que cada segundo el objeto se mueve tres metros en el sentido positivo de una dirección dada. La unidad de aceleración es velocidad sobre tiempo, como m/s/s o $m/s^2$. Una aceleración de 10 $m/s^2$ significa que cada segundo la velocidad cambia en 10 m/s.

Para un objeto que cae (o asciende) cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración debida a la gravedad es de 9.8 $m/s^2$ hacia abajo. Algunos usan 9.81 $m/s^2$, pero la variación de un punto en la superficie de la Tierra a otro es mayor que 0.01 $m/s^2$. Dado que este valor aparece con mucha frecuencia en ecuaciones de física, tiene su propio símbolo: $g = 9.8$ $m/s^2$. Aunque la aceleración de la gravedad está dirigida hacia abajo, $g$ nunca es negativa; $g$ es la magnitud de la aceleración de la gravedad.

## 2.2 ACELERACIÓN CONSTANTE

Un problema común en física es comprender el movimiento de un objeto con aceleración constante. La figura ilustra las relaciones entre los valores de interés. Lo importante es que si se dan tres cualesquiera de los cinco valores, es posible trazar el trapecio y deducir los valores restantes. (La excepción que confirma la regla es el caso en que la aceleración $a$ es igual a cero.)




Para realizar el álgebra, comenzamos con dos ecuaciones: $v - v_0 = at$ y $\Delta x = v_{\text{prom}} t$. Cuando la aceleración es constante, la velocidad promedio $v_{\text{prom}}$ es igual al promedio de las velocidades inicial y final.

$$v - v_0 = at \qquad \text{y} \qquad \Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t$$

Si, por ejemplo, sabemos que la velocidad inicial $v_0$ fue de 14 m/s, la aceleración $a$ de 3 m/s$^2$ y el tiempo $t$ durante el cual esto ocurrió resultó ser de 12 s, entonces podemos usar la primera ecuación para obtener la velocidad final $v$ y usar la segunda ecuación para obtener el desplazamiento $\Delta x$.

$$v - v_0 = at$$

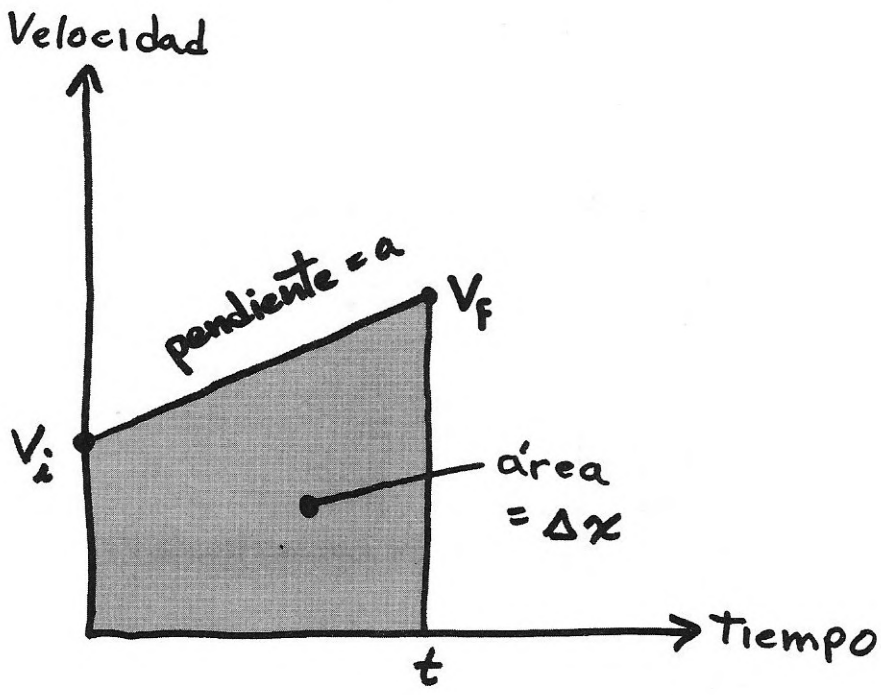
$$v - (14 \text{ m/s}) = (3 \text{ m/s}^2)(12 \text{ s})$$

$$v = 50 \text{ m/s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}[(14 \text{ m/s}) + (50 \text{ m/s})]\,(12 \text{ s})$$

$$\Delta x = 384 \text{ m}$$




También podríamos hacerlo de manera algebraica, dejando los números para el final.

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t = \frac{1}{2}[v_0 + (v_0 + at)]\, t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

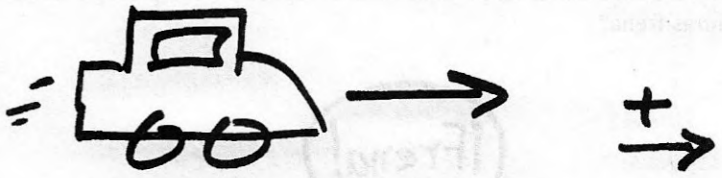
Si resolviéramos algebraicamente cada caso, tendríamos

| Ecuación | Incluye | Omite |
|---|---|---|
| $v - v_0 = at$ | $v_0$, $v$, $a$, $t$ | el desplazamiento $\Delta x$ |
| $\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t$ | $\Delta x$, $v_0$, $v$, $t$ | la aceleración $a$ |
| $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ | $\Delta x$, $v_0$, $a$, $t$ | la velocidad final $v$ |
| $\Delta x = vt - \frac{1}{2} at^2$ | $\Delta x$, $v$, $a$, $t$ | la velocidad inicial $v_0$ |
| $v^2 - v_0^2 = 2a\, \Delta x$ | $\Delta x$, $v_0$, $v$, $a$ | el tiempo $t$ |

Si conocemos *tres cualesquiera de las cinco cantidades* y hay una cuarta que deseamos encontrar, pero la quinta no nos interesa, entonces elegimos la ecuación que tiene las tres variables conocidas y la que deseamos conocer, pero no la que no nos interesa. En muchos libros de texto se utilizan otras ecuaciones como $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$; en realidad se trata de la misma ecuación, pero en este caso no funciona la regla de "tres de cinco".

**EJEMPLO**

Un automóvil deportivo tarda 6.0 segundos en acelerar desde el reposo hasta 60 mph. ¿Cuál es su aceleración?



Las cinco variables que podríamos conocer son $\Delta x$, $v_0$, $v$, $a$ y $t$. La velocidad inicial $v_0$ es cero y el tiempo $t$ es de 6.0 segundos. La rapidez final es de 60 mph, pero la velocidad final $v$ podría ser +60 mph o – 60 mph, dado que no hemos elegido aún un sentido positivo. Digamos que el sentido en que el automóvil termina moviéndose es el positivo, de donde $v = +60$ mph.

| | |
|---|---|
| desplazamiento | $\Delta x =$ |
| velocidad inicial | $v_0 = 0$ |
| velocidad final | $v = 60$ mi/h |
| aceleración | $a = ?$ |
| tiempo | $t = 6.0$ s |

No nos interesa la distancia recorrida por el automóvil durante su aceleración, así que elegimos $v - v_0 = at$:

$$v - v_0 = at$$
$$a = (v - v_0) / t$$
$$a = [(60 \text{ mi/h}) - (0)] / (6.0 \text{ s})$$
$$a = 10 \text{ mi/h/s}$$

La aceleración es de diez millas por hora por segundo, lo cual significa que cada segundo la velocidad cambia en 10 mi/h. Si deseamos el valor en el Sistema Internacional de Unidades (SI),

$$a = (10 \text{ mi/h/s}) \left(\frac{1610 \text{ m}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)$$
$$a = 4.5 \text{ m/s}^2$$

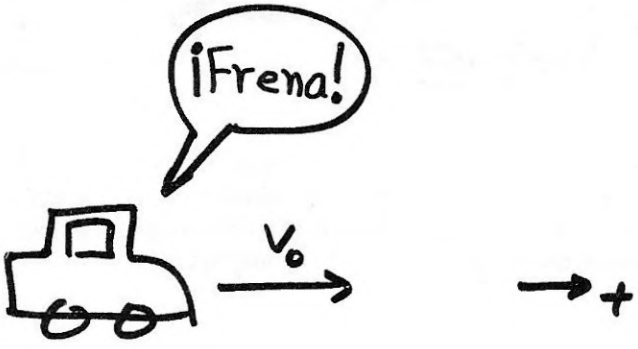
La aceleración es positiva. Esto significa que la aceleración tiene el mismo sentido que la velocidad final del automóvil.

¿Es necesario memorizar las cinco ecuaciones? En realidad no. Si se recuerdan dos de ellas es posible deducir la que se necesita. Esto resulta más fácil si se recuerdan las dos primeras: en la primera ecuación se despeja la variable que "no nos interesa" y se sustituye en la segunda. Muchos estudiantes de física encuentran más fácil recordarlas

todas excepto la cuarta, ya que raras veces la velocidad inicial es la variable que "no nos interesa".

**EJEMPLO**

Un automóvil puede frenar de 60 mph hasta el reposo en 118 pies. ¿Cuál es su aceleración mientras frena?




Elijamos el sentido en que el automóvil se mueve inicialmente como el positivo. Hagamos una anotación en el dibujo para indicar el sentido positivo. Entonces el desplazamiento $\Delta x$ también es positivo, ya que el automóvil siempre se mueve en el mismo sentido.

$$\Delta x = +118 \text{ ft} \left(\frac{0.305 \text{ m}}{1 \text{ ft}}\right) = 36 \text{ m}$$

$$v_0 = +60 \text{ mi/h} \left(\frac{1610 \text{ m}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 26.8 \text{ m/s}$$

$v = 0$
$a = ?$
$t =$

Si estamos decididos a resolver el problema en unidades métricas, éste es un buen momento para convertirlas.

No nos interesa el tiempo que tarda el automóvil en detenerse, así que elegimos $v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,\Delta x}$$

$$a = \frac{(0)^2 - (26.8 \text{ m/s})^2}{2(36 \text{ m})}$$

$$a = -10 \text{ m/s}^2$$

La aceleración es negativa. Una aceleración negativa no significa que el automóvil esté deteniéndose; significa que actúa en el sentido opuesto al que elegimos como positivo. Si hubiéramos elegido como negativo el sentido de la velocidad inicial, entonces

$$a = \frac{(0)^2 - (-26.8 \text{ m/s})^2}{2(-36 \text{ m})}$$

$$a = +10 \text{ m/s}^2$$

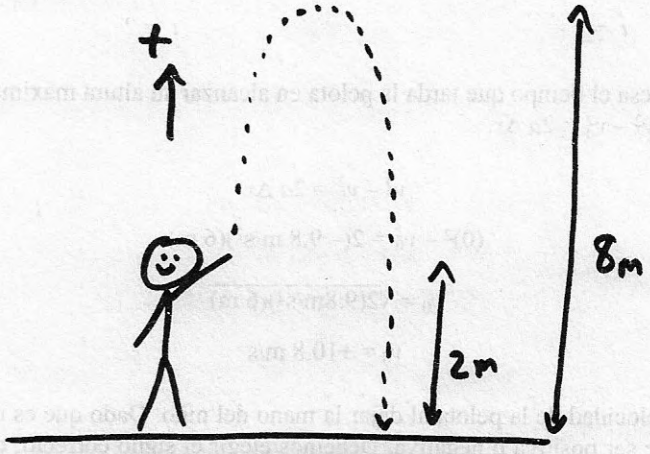
En ambos casos el signo de $a$ es opuesto al de $v_0$. El automóvil está deteniéndose porque la velocidad y la aceleración tienen sentidos opuestos.

*LECCIÓN*

Comience a resolver un problema de aceleración constante escribiendo los cinco símbolos ($\Delta x$, $v_0$, $v$, $a$ y $t$), después busque tres que conozca.

**EJEMPLO**

Un niño lanza una pelota de beisbol hacia arriba. Si la pelota se desprende de la mano a 2 m del suelo y alcanza su altura máxima a 8 m del suelo, ¿cuánto tarda en caer a éste?




Hagamos nuestra lista de variables, considerando que el sentido ascendente es el positivo:

$$\Delta x = -2 \text{ m}$$
$$v_0 =$$
$$v =$$
$$a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$
$$t = ?$$

Necesitamos una tercera variable para resolver el problema.

¿Podemos decir que la velocidad final es cero, dado que después de caer al suelo la pelota ya no se mueve? Durante su desplazamiento la pelota tiene una aceleración $g$ hacia abajo, pero desde el instante en que golpea el suelo hasta que queda en reposo (un tiempo muy corto) tiene una gran aceleración ascendente, mientras la velocidad descendente cambia a cero. Dado que ésta es una aceleración distinta, debemos usar las ecuaciones de aceleración constante desde "el instante en que sale de la mano" hasta "el instante en que golpea el suelo". Cuando hace contacto con el suelo, la velocidad de la pelota no es cero.

Si sólo supiéramos que el niño lanzó la pelota hacia arriba y que después de una aceleración de $-g$ ésta golpeó el suelo, no podríamos resolver el problema. Pero tenemos otro dato: la altura máxima de la pelota. El instante en que la pelota alcanza su altura máxima no es uno de nuestros datos iniciales o finales, así que para usarlo necesitamos resolver otro "problema". En su altura máxima, la pelota no se mueve hacia arriba ni hacia abajo, por lo que su velocidad es cero.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta x = 6$ m | | $\Delta x = -2$ m |
| $v_0 = ?$ | $\longrightarrow$ | $v_0 =$ |
| $v = 0$ | | $v =$ |
| $a = -g = -9.8$ m/s$^2$ | | $a = -g = -9.8$ m/s$^2$ |
| $t =$ | | $t = ?$ |

No nos interesa el tiempo que tarda la pelota en alcanzar su altura máxima, por lo que empleamos $v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$$

$$(0)^2 - v_0^2 = 2(-9.8 \text{ m/s}^2)(6 \text{ m})$$

$$v_0 = \sqrt{2(9.8\text{m/s}^2)(6 \text{ m})}$$

$$v_0 = \pm 10.8 \text{ m/s}$$

Ésta es la velocidad de la pelota al dejar la mano del niño. Dado que es una raíz cuadrada, puede ser positiva o negativa. Debemos elegir el signo correcto; el álgebra no nos lo indica. Cuando la pelota sale de la mano va hacia arriba, que es el sentido positivo, de donde $v_0 = +10.8$ m/s.

Ahora podemos resolver el problema. No nos interesa la velocidad final (cuán rápido se mueve la pelota al golpear el suelo), de modo que usamos $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$(-2 \text{ m}) = (+10.8 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$(4.9 \text{ m/s}^2)t^2 + (-10.8 \text{ m/s})t + (-2 \text{ m}) = 0$$

Empleamos la ecuación cuadrática:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observe que la $a$ de la ecuación cuadrática no tiene nada que ver con la aceleración; es el coeficiente del término al cuadrado.

$$t = \frac{-(-10.8 \text{ m/s}) \pm \sqrt{(-10.8 \text{ m/s})^2 - 4(4.9 \text{ m/s}^2)(-2 \text{ m})}}{2(4.9 \text{ m/s}^2)}$$

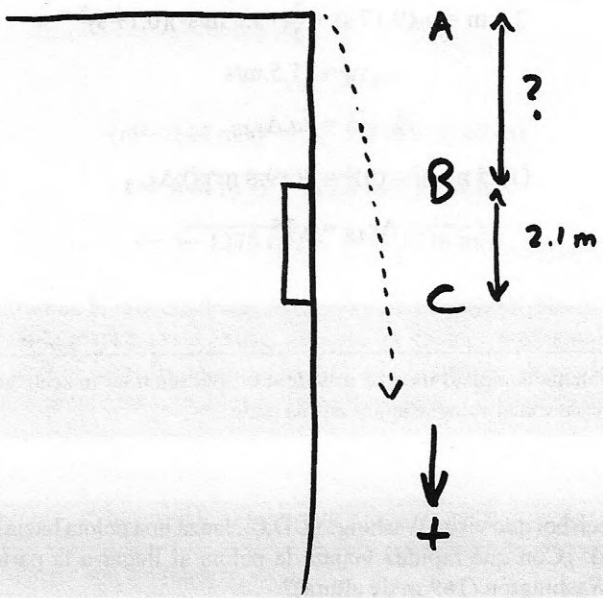
$$t = \frac{(10.8 \text{ m/s}) \pm (12.5 \text{ m/s})}{(9.8 \text{ m/s}^2)}$$

$$t = -0.17 \text{ s} \quad \text{o} \quad 2.38 \text{ s}$$

¿Por qué las dos respuestas? Observemos la trayectoria de la pelota. Si la aceleración constante se extendiera para incluir tiempos negativos (antes de salir de la mano del niño), entonces podríamos recorrer hacia atrás la trayectoria de la pelota hasta que ésta "deja" el suelo, 0.17 segundos antes de alcanzar una altura de 2 metros. Elegimos el tiempo positivo de 2.38 segundos.

**EJEMPLO**

Una piedra que se deja caer desde la azotea de un edificio tarda 0.17 segundos en pasar de la parte superior a la inferior de una ventana de 2.1 m de altura. ¿A qué distancia de la parte superior de la ventana está la azotea del edificio?

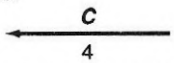


## 2.3 VECTORES

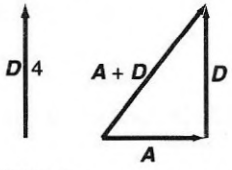
No todos los movimientos ocurren en línea recta. Si se lanza una pelota de tenis horizontalmente, no sólo se desplaza de manera horizontal sino que también lo hace verticalmente (cae) debido a la gravedad. Este movimiento (en un plano) es bidimensional, mientras que el movimiento a lo largo de una línea recta es unidimensional. Necesitamos ser capaces de analizar el movimiento bidimensional. Abordaremos los problemas bidimensionales dividiéndolos en dos problemas unidimensionales.

Todo lo que tiene dirección y sentido, así como magnitud (tamaño), es un **vector**. En esta sección aprenderemos a sumar vectores. En la siguiente sección utilizaremos vectores para analizar el movimiento de las pelotas de tenis.

Consideremos los vectores $A$ y $B$ (en muchos textos de física los vectores se escriben en negritas para que el lector sepa que se trata de vectores). ¿Cuál es el resultado de $A + B$? No es 7, sino "7 a la derecha". Cuando sumamos dos vectores obtenemos otro vector, el cual también tiene sentido.



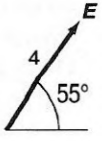

¿Cuál es el resultado de $A + C$? Podemos expresarlo como "1 a la izquierda" o "– 1 a la derecha". Dos personas podrían elegir sistemas de coordenadas diferentes y expresar la respuesta de modo distinto, pero trazarían el mismo vector como respuesta. Es sencillo sumar vectores paralelos o antiparalelos ($A$ y $C$ son antiparalelos).



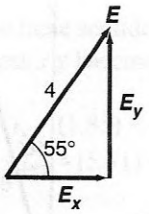

¿Cuál es el resultado de $A + D$? Dado que son perpendiculares entre sí, forman un triángulo rectángulo. Podemos usar el teorema de Pitágoras para encontrar el resultado: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Y por medio de trigonometría determinamos el ángulo inferior izquierdo:

$$\tan \phi = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{4}{3}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53°$$




¿Cuál es el resultado de $A + E$? Es muy fácil sumar vectores paralelos o perpendiculares, pero $A + E$ no corresponden a ninguno de esos casos. Lo que hacemos es dividir el vector $E$ en dos partes, $E_x$ y $E_y$. Dado que $A$ y $E_x$ son paralelos es fácil sumarlos. $E_y$ es perpendicular a $A$, de modo que también es sencillo sumarlo al resultado anterior. Por medio de trigonometría dividimos $E$ en $E_x$ y $E_y$.

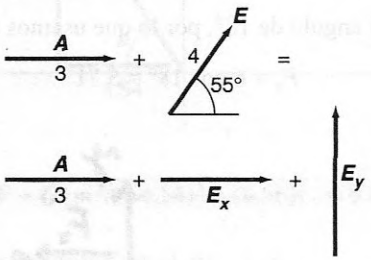



$$\cos 55° = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{E_x}{E}$$

$$E_x = E \cos 55° = (4) \cos 55° = 2.29$$

$$\text{sen } 55° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{E_y}{E}$$

$$E_y = E \text{ sen } 55° = (4) \text{ sen } 55° = 3.28$$




$$A + E = A + E_x + E_y = (A + E_x) + E_y$$

$$A + E_x = 3 + 2.29 = 5.29$$

$$\sqrt{5.29^2 + 3.28^2} = 6.22$$

Siempre que se suman vectores, el procedimiento es el siguiente:

- Se elige un conjunto de ejes de coordenadas (no tienen que ser necesariamente horizontal y vertical, pero sí deben ser perpendiculares entre sí).
- Se divide cada vector en componentes paralelas a los ejes.
- Se suman las componentes paralelas.
- Deben quedar dos componentes perpendiculares entre sí, de modo que las sumamos por medio del teorema de Pitágoras.

La componente $x$ no siempre es un coseno y la componente $y$ no siempre es un seno. Más bien, el cateto adyacente del triángulo interviene en la fórmula del coseno y el cateto opuesto interviene en la fórmula del seno. Asimismo, debe tenerse presente que las componentes pueden ser negativas.

**EJEMPLO**

Sume los vectores $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$.

Como antes, buscamos las componentes.

$$F_x = 6 \text{ sen } 18° = 1.85$$
$$F_y = 6 \cos 18° = 5.71$$
$$G_x = -7 \cos 24° = -6.39$$
$$G_y = 7 \text{ sen } 24° = 2.85$$

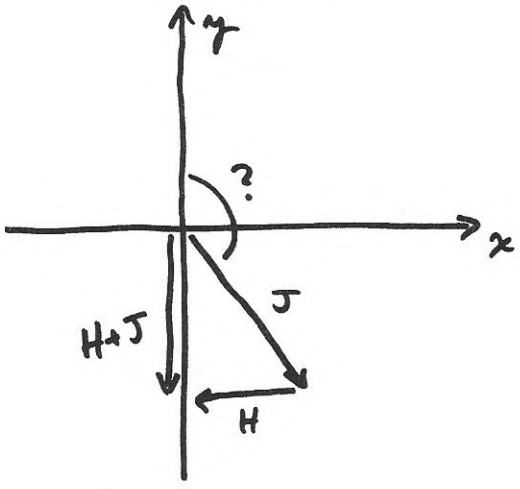
Restamos las componentes $x$ y hacemos lo mismo con las componentes $y$.

$$(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F})_x = G_x - F_x = (-6.39) - (1.85) = -8.24$$
$$(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F})_y = G_y - F_y = (2.85) - (5.71) = -2.86$$

El vector resultante se extiende 8.24 unidades a la izquierda y 2.86 hacia abajo.

**EJEMPLO**

El vector $\boldsymbol{H}$ está 3.1 cm a la izquierda y el vector $\boldsymbol{J}$ tiene una longitud de 4.7 cm. La suma $\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$ se extiende verticalmente hacia abajo. ¿Qué ángulo forma $\boldsymbol{J}$ con el eje $y$?




Para que $\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$ apunte hacia abajo, su componente $x$ debe ser cero,

$$(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J})_x = 0$$
$$H_x + J_x = 0$$

Dado que $\boldsymbol{H}$ es horizontal, sólo tiene componente $x$, y $H_x = -|\boldsymbol{H}| = -3.1$ cm. El vector $\boldsymbol{J}$ tiene magnitud $|\boldsymbol{J}| = J = 4.7$ cm y una componente $x$ igual a $J_x = -H_x = +3.1$ cm. Dado que la componente $x$ es opuesta al ángulo $\phi$, la componente $x$ se calcula con el seno.

$$J_x = J \operatorname{sen} \phi$$
$$+3.1 \text{ cm} = 4.7 \text{ cm} \operatorname{sen} \phi$$
$$\operatorname{sen} \phi = \frac{+3.1 \text{ cm}}{4.7 \text{ cm}} = \frac{3.1}{4.7} = 0.6596$$
$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}(0.6596)$$

Este paso tiene sus bemoles. Hay dos ángulos en el círculo (0° a 360° y – 180° a 180°) cuyo seno es 0.6596, a saber: 41.3° y 138.7°. Siempre que se encuentra una función trigonométrica inversa, la calculadora indica sólo uno de los dos valores, por lo que es necesario encontrar el otro y determinar cuál se requiere. Si se usara 41.3°, entonces la componente vertical de $\boldsymbol{J}$ sería ascendente en lugar de descendente, por lo que se necesita el otro valor, 138.7°.

## 2.4 MOVIMIENTO BALÍSTICO

En ocasiones un objeto se desplaza por el aire de manera tanto horizontal como vertical. La aceleración sigue siendo vertical hacia abajo, mientras que la velocidad tiene una componente horizontal. Dado que la aceleración y la velocidad no son paralelas ni antiparalelas, no podemos sustituir las magnitudes en nuestras ecuaciones de aceleración constante y resolverlas. En vez de esto, descomponemos cada vector en sus componentes y se resuelve cada una por separado (las componentes no tienen que ser necesariamente horizontal y vertical, pero deben ser perpendiculares).

La dirección vertical suele denominarse la dirección $y$, pero podemos usar cualquier nombre ($x$, z o *juancho*, por ejemplo). La aceleración en la dirección vertical es constante: $g$ hacia abajo. Por tanto, podemos usar todas las ecuaciones de aceleración constante. Para no perder de vista cuándo estamos trabajando con componentes en $y$ y cuándo en $x$, utilizamos los subíndices $x$ y $y$; así,

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \text{pasa a ser} \qquad \Delta x = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

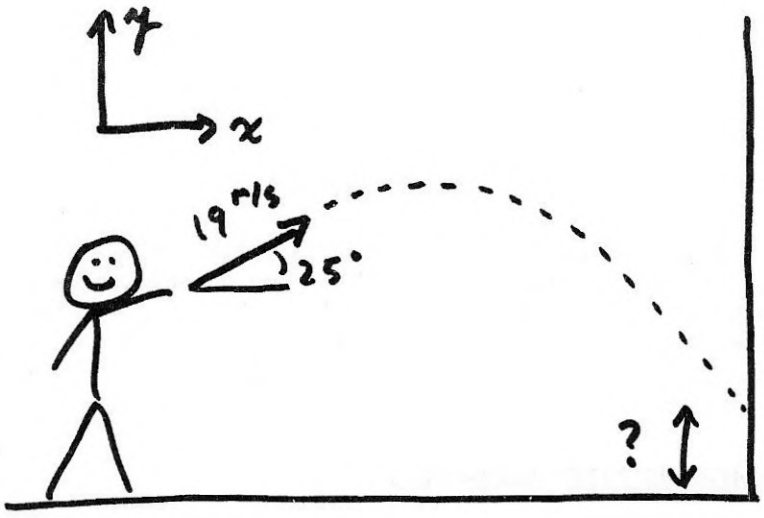
para la dirección horizontal y

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x \qquad \text{pasa a ser} \qquad v_y^2 - v_{y0}^2 = 2a_y\,\Delta y$$

para la dirección vertical. No se trata de ecuaciones nuevas, sino sólo de nuevos nombres para los valores en las mismas ecuaciones. $\Delta x$ es el "desplazamiento horizontal", $v_{y0}$ es la "velocidad vertical inicial", y $t_y$ es el "tiempo vertical". Como el tiempo no es un vector, no tiene componentes. El tiempo en el que el proyectil viaja horizontalmente es el mismo en el que viaja verticalmente. Ésta es la conexión entre el problema horizontal y el vertical: el tiempo $t$ es el mismo.

### EJEMPLO

Juan lanza una pelota contra un muro de ladrillo que se halla a 23 m. La lanza a 19 m/s a un ángulo de 25° por arriba de la horizontal. Si la pelota sale de su mano 1.7 m arriba del suelo, ¿a qué altura respecto del suelo golpeará el muro?




Dividamos el problema en una parte horizontal $x$ y otra vertical $y$. La aceleración es constante en cada eje.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $= +23$ m | $\Delta y$ | $= ?$ |
| $v_{x0}$ | $= +(19$ m/s) cos 25° | $v_{y0}$ | $= +(19$ m/s) sen 25° |
| $v_x$ | $=$ | $v_y$ | $=$ |
| $a_x$ | $= 0$ | $a_y$ | $= -$ g |
| $t$ | $=$ | $t$ | $=$ |

Tratamos de encontrar el desplazamiento vertical $y$. Por desgracia, sólo conocemos dos de las cinco cantidades en la dirección vertical, de modo que no podemos encontrar $y$. Pero conocemos tres de las cinco variables en la dirección horizontal, así que podemos encontrar $v_x$ y $t$. El tiempo $t$ es el mismo para las direcciones horizontal y vertical, de modo que si en el problema horizontal encontramos $t$, entonces podemos usar éste como nuestro tercer valor en el problema vertical.

$$\Delta x = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$(23 \text{ m}) = [(19 \text{ m/s}) \cos 25°]t + \frac{1}{2}(0)t^2$$

$$t = \frac{(23 \text{ m})}{(19 \text{ m/s}) \cos 25°}$$

$$t = 1.34 \text{ s}$$

Ahora podemos encontrar $y$ en el problema vertical.

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \Delta y = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

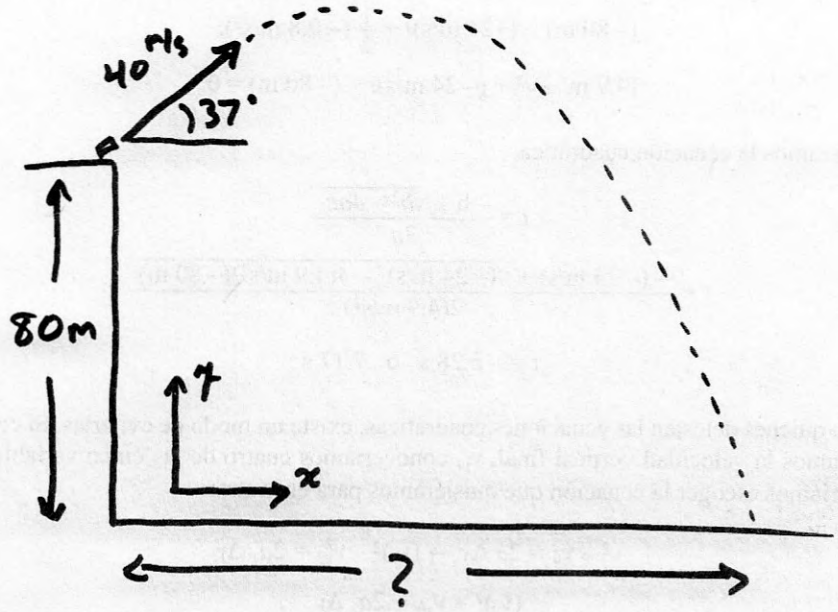
$$\Delta y = [(19 \text{ m/s}) \text{ sen } 25°](1.34 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)(1.34 \text{ s})^2$$

$$\Delta y = 2.0 \text{ m}$$

La pelota golpea el muro 2 m arriba de la altura a la que salió de la mano de Juan, o sea a 3.7 m del suelo. Si $\Delta y$ hubiera sido – 1.7 m o incluso más negativo, la pelota habría golpeado el suelo antes de llegar al muro.

**EJEMPLO**

Un cañón está en la cima de un risco de 80 m de altura que domina una planicie. Dispara un obús a 40 m/s con un ángulo de 37° arriba de la horizontal. ¿A qué distancia de la base del risco cae el obús?




Podemos dividir el problema en una parte horizontal $x$ y otra vertical $y$. La aceleración es constante en cada eje.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | = ? | $\Delta y$ | = – 80 m |
| $v_{x0}$ | = + (40 m/s) cos 37° | $v_{y0}$ | = + (40 m/s) sen 37° |
| $v_x$ | = | $v_y$ | = |
| $a_x$ | = 0 | $a_y$ | = – g |
| $t$ | = | $t$ | = |

Intentamos encontrar el desplazamiento horizontal $x$. Dado que la aceleración horizontal $a_x$ es cero, $v_x = v_{x0}$. Por desgracia, ésta es la excepción a la regla "tres de cinco": cuando la aceleración es cero. Pero si la aceleración es cero, entonces la velocidad no cambia, así que podemos encontrar el desplazamiento horizontal con una velocidad horizontal constante:

$$\Delta x = v_{x0}t$$

Para encontrar $x$ necesitamos $t$, al cual no conocemos.

Veamos la parte vertical del problema. Conocemos tres de las cinco variables, de modo que podemos encontrar las otras dos. En particular, podemos determinar el tiempo $t$. Es el mismo que en la parte horizontal: el obús deja de moverse horizontalmente cuando golpea el suelo. Encontremos $t$ para la parte vertical y utilicémoslo luego en la parte horizontal.

En la parte vertical no nos interesa $v_y$, así que

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \Delta y = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$(-80\text{ m}) = (+24\text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9.8\text{ m/s}^2)t^2$$

$$(4.9\text{ m/s}^2)t^2 + (-24\text{ m/s})t + (-80\text{ m}) = 0$$

Utilizamos la ecuación cuadrática,

$$t = \frac{-\text{b} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-24\text{ m/s}) \pm \sqrt{(-24\text{ m/s})^2 - 4(4.9\text{ m/s}^2)(-80\text{ m})}}{2(4.9\text{ m/s}^2)}$$

$$t = -2.28\text{ s} \quad \text{o} \quad 7.17\text{ s}$$

Para quienes detestan las ecuaciones cuadráticas, existe un modo de evitarlas. Si conociéramos la velocidad vertical final, $v_y$, conoceríamos cuatro de las cinco variables y podríamos escoger la ecuación que quisiéramos para encontrar $t$.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x \rightarrow (v_y)^2 - v_{y0}^2 = 2a_y\,\Delta y$$

$$(v_y)^2 = v_{y0}^2 + 2a_y\,\Delta y$$

$$v_y = \sqrt{(24\text{ m/s})^2 + 2(-9.8\text{ m/s}^2)(-80\text{ m})}$$

$$v_y = \pm 46.3\text{ m/s}$$

Puesto que el obús desciende, y dado que elegimos como positivo el sentido ascendente, $v_y = -46.3$ m/s. Ahora despejamos el tiempo $t$.

$$v - v_0 = at \rightarrow v_y - v_{y0} = a_y t$$

$$t = \frac{v_y - v_{y0}}{a_y}$$

$$t = \frac{(-46.3 \text{ m/s}) - (24 \text{ m/s})}{(-9.8 \text{ m/s}^2)}$$

$$t = 7.17 \text{ s}$$

En realidad estamos aplicando la misma álgebra —compare las dos raíces cuadradas—, y elegir el signo de $v_y$ es lo mismo que elegir el signo para el resultado de la ecuación cuadrática. Pero a menudo es más fácil realizar una tarea en dos pasos sencillos que en un paso complicado (lo cual constituye el tema de este libro).

Resolvamos ahora la parte horizontal del problema.

$$x = v_{x0}t$$
$$x = (32 \text{ m/s})(7.17 \text{ s})$$
$$x = 230 \text{ m}$$

*LECCIÓN*

Divida los problemas bidimensionales en un par de problemas unidimensionales.

**EJEMPLO**

Un cañón se encuentra en la cima de un risco de 80 m de altura que domina un campo con pendiente descendente de 15°. Dispara un obús a 40 m/s con un ángulo de 37° arriba de la horizontal. ¿A qué distancia de la base del risco caerá el obús?

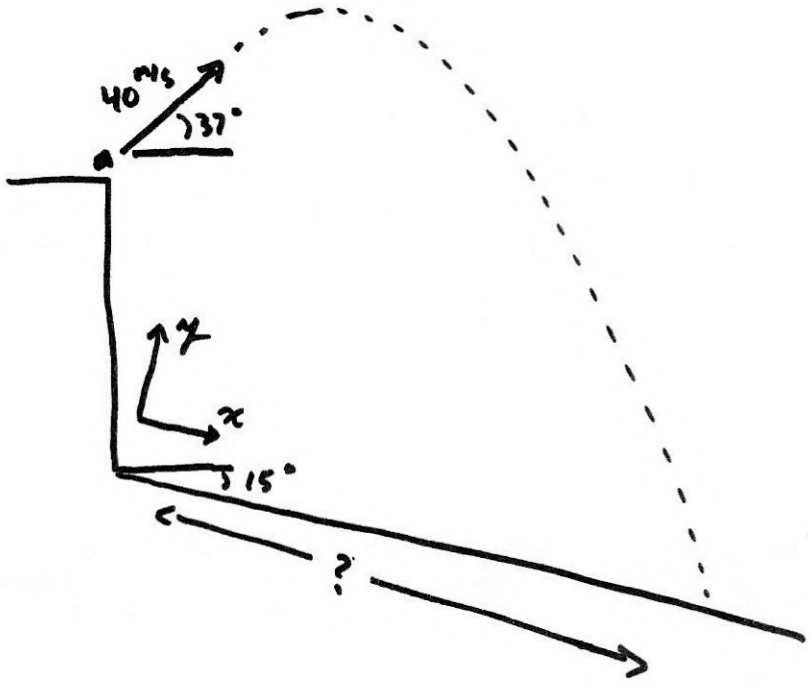
Si utilizamos como nuestros ejes la horizontal y la vertical, tenemos

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $= ?$ | $\Delta y$ | $= (-80 \text{ m} - x \tan 15°)$ |
| $v_{x0}$ | $= +(40 \text{ m/s}) \cos 37°$ | $v_{y0}$ | $= +(40 \text{ m/s}) \text{ sen } 37°$ |
| $v_x$ | $=$ | $v_y$ | $=$ |
| $a_x$ | $= 0$ | $a_y$ | $= -g$ |
| $t$ | $=$ | $t$ | $=$ |

Podríamos resolver esto, pero sería muy arduo debido a la conexión entre los desplazamientos en $x$ y en $y$.

Si, en cambio, hacemos nuestro eje $x$ paralelo al campo inclinado y $y$ perpendicular a $x$, entonces

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $= d + (80 \text{ m}) \text{ sen } 15°$ | $\Delta y$ | $= -(80 \text{ m}) \cos 15°$ |
| $v_{x0}$ | $= +(40 \text{ m/s}) \cos 52°$ | $v_{y0}$ | $= +(40 \text{ m/s}) \text{ sen } 52°$ |
| $v_x$ | $=$ | $v_y$ | $=$ |
| $a_x$ | $= +g \text{ sen } 15°$ | $a_y$ | $= -g \cos 15°$ |
| $t$ | $=$ | $t$ | $=$ |




donde $d$ es la distancia desde el pie del risco hasta el punto de caída del obús. Podemos resolver este problema del mismo modo que el anterior.

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \Delta y = v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$(-77.3 \text{ m}) = (+31.5 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9.47 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$(4.73 \text{ m/s}^2)t^2 + (-31.5 \text{ m/s})t + (-77.3 \text{ m}) = 0$$

$$t = \frac{-(-31.5 \text{ m/s}) \pm \sqrt{(-31.5 \text{ m/s})^2 - 4(4.73 \text{ m/s}^2)(-77.3 \text{ m})}}{2(4.73 \text{ m/s}^2)}$$

$$t = -1.91 \text{ s o } 8.57 \text{ s}$$

$$\Delta x = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

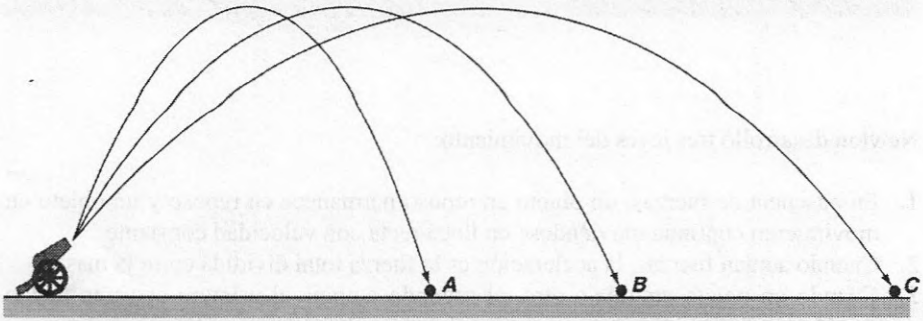
$$[d + (80 \text{ m}) \text{ sen } 15°] = (24.6 \text{ m/s})(8.57 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2.54 \text{ m/s}^2)(8.57 \text{ s})^2$$

$$d = 283 \text{ m}$$

(El objetivo de este problema es ilustrar un caso en que los ejes no son horizontal y vertical.)

**EJEMPLO**

Tres cañones disparan sendos obuses a un blanco. Se ilustran las trayectorias. Ordene los obuses con base en la velocidad inicial, de mayor a menor.




Veamos primero la parte vertical de cada problema, concentrándonos en la altura máxima. Los tres obuses tienen el mismo desplazamiento vertical, la misma aceleración vertical ($-g$) y la misma velocidad vertical final (cero en el punto más alto). Dado que conocemos tres de las cinco variables, podemos aplicar nuestra técnica de aceleración constante. Por lo tanto, deben tener la misma velocidad vertical inicial, el mismo tiempo para alcanzar el punto máximo, y el mismo tiempo para caer. Verticalmente los tres obuses son idénticos.

Horizontalmente, $C$ llega más lejos que $A$ en el mismo tiempo, de modo que la velocidad horizontal de $C$ debe ser mayor que la de $A$. Puesto que las velocidades verticales de $A$ y $C$ son las mismas, $C$ debe tener una rapidez inicial mayor que la de $A$.

$$v_C > v_B > v_A$$

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- Resuelva los problemas de aceleración constante usando la regla "tres de cinco".

| Ecuación | Omite |
|---|---|
| $v - v_0 = at$ | el desplazamiento $\Delta x$ |
| $\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ | la aceleración $a$ |
| $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | la velocidad final $v$ |
| $\Delta x = vt - \frac{1}{2}at^2$ | la velocidad inicial $v_0$ |
| $v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$ | el tiempo $t$ |

- Divida los problemas bidimensionales en dos problemas utilizando los ejes perpendiculares de su elección.
- Al calcular las componentes, use el coseno para el cateto adyacente y el seno para el cateto opuesto.

CAPÍTULO 3

# *FUERZAS*

Newton desarrolló tres leyes del movimiento:

1. En ausencia de fuerzas, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento continúa moviéndose en línea recta con velocidad constante.
2. Cuando actúan fuerzas, la aceleración es la fuerza total dividida entre la masa.
3. Cuando un objeto empuja a otro, el segundo empuja al primero con una fuerza igual y de sentido opuesto.

La primera ley establece que en ausencia de fuerzas, el movimiento no cambia. Los antiguos griegos no fueron los únicos a quienes pasó inadvertido este hecho; nadie lo advirtió por dos mil años. Ello no quiere decir que tal hecho sea algo difícil de entender; es sólo que no se trata de algo intuitivo. El problema es que no existe en la Tierra algún lugar en el que no actúen fuerzas.

La segunda ley de Newton es $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}$. Esto significa que si se suman todas las fuerzas para obtener la fuerza total o fuerza neta, entonces la fuerza total es igual a la masa por la aceleración. La masa es una medida de la cantidad de materia y se mide en kilogramos (1 kg = 1000 gramos). La fuerza se mide en newtons:

$$(1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg m/s}^2 = 1 \text{ N}$$

La tercera ley de Newton a veces se expresa así: "A cada acción corresponde una reacción igual y de sentido opuesto". Este enunciado de la tercera ley es confuso. Una forma más exacta es: "Si $\mathcal{A}$ empuja a $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ empuja a $\mathcal{A}$".

El primer paso en cualquier problema de fuerzas consiste en construir un diagrama de cuerpo libre. Una vez que lo tenemos, necesitamos elegir un sistema de ejes de coordenadas. Necesitaremos sumar vectores y debemos estar en posición de especificar direcciones y sentidos de manera consistente. Después emplearemos el diagrama para escribir las ecuaciones. Por último, resolveremos las ecuaciones para obtener la respuesta.

## 3.1 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

En este capítulo emplearemos la segunda ley, $F = ma$, una y otra vez. Para encontrar la fuerza total (o neta), debemos sumar todas las fuerzas que actúan sobre el objeto (sea éste una caja o un pato). Para ello comenzaremos por trazar un diagrama de cuerpo libre. **El objetivo del diagrama de cuerpo libre es hacer una lista completa de las fuerzas que actúan sobre un objeto y obtener las direcciones y los sentidos correctos.**

En un examen reciente se planteó un problema de opción múltiple que incluía tan sólo dos fuerzas, los estudiantes que hicieron el intento de trazar un diagrama de cuerpo libre eligieron la respuesta correcta alrededor de 75% de las veces, mientras que quienes no lo trazaron tuvieron resultados apenas mejores que eligiendo al azar.

*LECCIÓN*

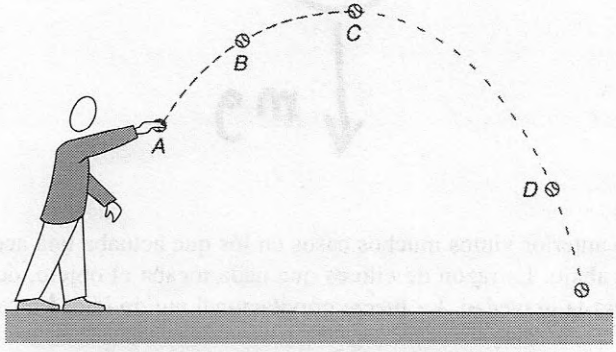
No espere poder resolver correctamente un problema de fuerzas sin un diagrama de cuerpo libre.

Cuando hablamos de un diagrama de cuerpo libre, la palabra libre significa sin compromisos, como un soltero. Trazamos un diagrama para un solo objeto, donde se muestran todas las fuerzas que actúan sobre ese objeto.

Existen muchos tipos de fuerzas. Cualquier cosa que empuje un objeto o tire de él es una fuerza. Cuerdas, resortes, la gravedad, el piso e incluso el aire son capaces de ejercer una fuerza sobre un objeto. Las fuerzas pueden dividirse en dos tipos (cualquier cosa puede dividirse en dos tipos, pero ello es especialmente útil en el caso de las fuerzas). La mayoría de las fuerzas son ejercidas por algo que toca un objeto (fuerzas de contacto). Cuerdas, resortes, el piso y el aire, todos encajan en esta categoría. Otras fuerzas pueden empujar un objeto o tirar de él sin tocarlo. Las fuerzas "a distancia" importantes son la gravedad y la electricidad. Abordaremos la electricidad más adelante.

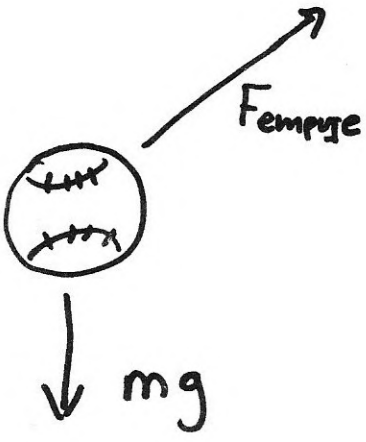
**EJEMPLO**

Un jugador de beisbol lanza una pelota en el aire, como se muestra. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada posición marcada.

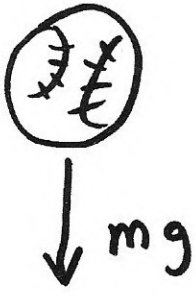



Cuando el jugador lanza la pelota en el punto *A*, está en contacto con ella mientras la empuja hacia arriba y a la derecha. Nada más está en contacto con la pelota, así que cualesquiera otras fuerzas deben ser fuerzas a distancia. Dado que aún no hemos estudiado la electricidad, la única otra fuerza posible es la gravedad. La gravedad atrae la

pelota hacia abajo con una fuerza de magnitud *mg*. (Algunos escriben *W* y después la sustituyen por la magnitud *mg*.)




Después de que la pelota se separa de la mano, no hay nada en contacto con ella. La única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. Esto es válido en los puntos *B* a *D* y en todos los puntos en la trayectoria de la pelota, hasta el momento en que toca el suelo.




En el capítulo anterior vimos muchos casos en los que actuaba una aceleración de *g* dirigida hacia abajo. La razón de ello es que nada tocaba el objeto, de modo que la única fuerza era la gravedad. La fuerza gravitacional *mg* dividida entre la masa *m* es igual a *g*.

*LECCIÓN*

La fuerza de la gravedad siempre está dirigida hacia abajo, incluso si el objeto se mueve hacia arriba o no se mueve en absoluto.

Una fuerza que de manera sistemática pasaremos por alto es la resistencia del aire. Cuando un objeto se mueve en el aire, empuja al aire hacia delante mientras que el aire lo empuja hacia atrás. La razón de que una pluma caiga más despacio que un ladrillo es que el efecto de la resistencia del aire sobre la pluma es mayor (lo cual no equivale a decir que la fuerza de la resistencia del aire es mayor).

¿Por qué ignoramos la resistencia del aire? Para muchos objetos, la fuerza de la resistencia del aire es mucho menor que cualquiera de las otras fuerzas. Pero la verdadera razón es que la resistencia del aire resulta muy difícil de calcular. Dicha fuerza cambia de manera proporcional con la rapidez con que el objeto se mueve en el aire. Si la fuerza cambia, la aceleración cambia, y todo lo que aprendimos antes es sustituido por algo mucho más complicado. Sin la resistencia del aire, un estudiante principiante de física puede resolver el problema en pocos minutos. Con la resistencia del aire, un físico graduado no puede resolver el problema algebraicamente. Dado que nos gustan los problemas que pueden resolverse, pasaremos por alto la resistencia del aire.

**EJEMPLO**

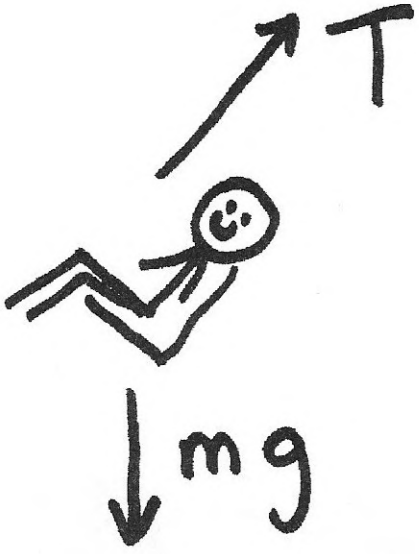
Una niña se balancea en un columpio. Trace un diagrama de cuerpo libre para la niña y el columpio.

La niña está cerca de la superficie de la Tierra, de modo que experimenta la gravedad. La gravedad apunta directamente hacia abajo y tiene magnitud $mg$. La gravedad y la electricidad son las únicas fuerzas que no requieren contacto, aunque aún no hemos abordado la electricidad.

¿Qué fuerzas de contacto actúan en nuestro caso? Hay una cadena unida al columpio, de modo que ésta podría ejercer una fuerza. Las cadenas (así como los resortes, cuerdas y cables de acero) ejercen una fuerza en el sentido en que tiran del objeto (ate una cuerda a un refrigerador y trate de empujarlo con ella). La magnitud de esta fuerza es igual a la tensión en la cadena.

¿Conocemos la tensión en la cadena que sostiene el columpio? No, no se nos indicó y no es inmediatamente obvia. No es cierto que la tensión sea igual al peso de la

niña (en este caso es igual a mg sen $\theta$, donde $\theta$ es el ángulo que forma la cadena con la vertical). Dado que no conocemos el valor de la fuerza de tensión, sólo su sentido, damos a la magnitud un símbolo o nombre. Dos símbolos típicos usados para la tensión son $T$ y $F_T$.



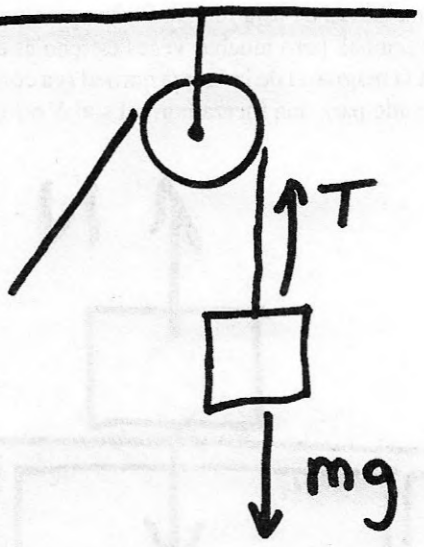

Advierta que no es posible que estas fuerzas se cancelen mutuamente si se suman. La velocidad de la niña está cambiando, incluso si la velocidad es cero en ese momento, por lo que la aceleración de la niña no es cero y, por tanto, la fuerza total no es cero.

Siempre que se encuentre con una fuerza de magnitud desconocida, asígnele un símbolo o nombre para que pueda hacerse referencia a ella, hablar de ella y ponerla en una ecuación. Quizá podamos determinarla más tarde; quizá se cancele y no tengamos que calcularla. El símbolo es la magnitud de la fuerza y es un valor positivo, aunque la fuerza apunte en el sentido negativo. Este símbolo puede ser casi cualquier cosa, excepto símbolos que ya se estén utilizando en el problema (como $m$ y $g$), pero resulta conveniente elegir un símbolo que otras personas asociarían con la fuerza en cuestión. La literal $a$ sería una mala elección, porque alguien podría pensar que se refiere a la aceleración, por ejemplo. Además, quizá más adelante necesitemos encontrar la aceleración.

**EJEMPLO**

Mediante una cuerda y una polea se alza una caja con una aceleración hacia arriba de 0.4 m/s$^2$. Trace el diagrama de cuerpo libre de la caja.

La caja está cerca de la superficie de la Tierra, de modo que hay una fuerza gravitacional $mg$ dirigida hacia la Tierra. El único objeto en contacto con la caja es la cuerda, que tira de la caja hacia arriba. No conocemos la fuerza de tensión, así que le asignamos un símbolo, digamos $T$.




Dado que la caja se está acelerando hacia arriba, la fuerza total apunta hacia arriba. Si sumamos las dos fuerzas que actúan sobre la caja, el resultado debe tener sentido ascendente, por lo que la tensión es mayor que la gravedad ($T > mg$). Más adelante podremos calcular la magnitud de la tensión.

*LECCIÓN*

Las cuerdas ejercen una fuerza de tensión. Esta fuerza siempre actúa en el sentido en que tira la cuerda. A menos que se nos indique la magnitud de esta fuerza, la desconocemos.

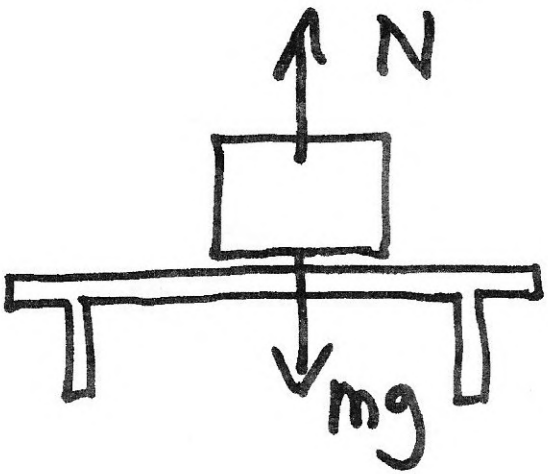
Cuando un objeto está en contacto con una superficie, ésta puede empujar al objeto. La razón de que el lector no caiga al interior de la Tierra es porque el suelo (o el piso) lo empuja hacia arriba. Esta fuerza siempre actúa hacia arriba perpendicularmente a la superficie y tiene apenas la magnitud suficiente para evitar que los objetos caigan a través de ella. Podríamos llamarla la fuerza "hacia afuera perpendicular a la superficie", pero sería un nombre demasiado largo. Los matemáticos tienen una palabra que significa "hacia afuera perpendicular a la superficie", así que la tomaremos prestada. Esa palabra es *normal*. La **fuerza normal** no es la fuerza habitual o típica, sino la fuerza "hacia afuera perpendicular a la superficie".

**EJEMPLO**

Una caja se encuentra encima de una mesa. Trace el diagrama de cuerpo libre para la caja.

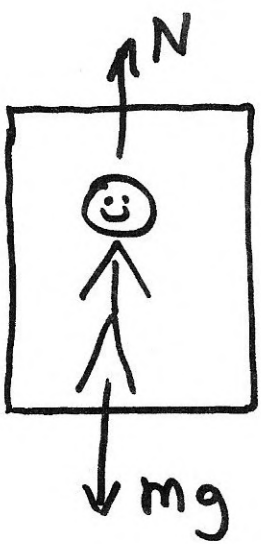
La caja está sobre una mesa, la cual está sobre la Tierra, de modo que hay una fuerza gravitacional *mg* dirigida hacia la Tierra. El único objeto en contacto con la caja es la mesa, que podría empujarla. La fuerza normal debe ser perpendicular a la superficie, o dirigida hacia arriba en este caso.

No conocemos la magnitud de esta fuerza. Podría parecer que la fuerza normal es igual a la fuerza gravitacional, pero muchas veces esto no es cierto. Por esa razón elegimos un símbolo para la magnitud de la fuerza normal (ya conocemos su sentido). Los símbolos usados a menudo para una fuerza normal son $N$ o $F_N$.




**EJEMPLO**

Una niña sube en un ascensor del primer piso al quinto piso. Trace un diagrama de cuerpo libre para la niña.




Dado que la niña está cerca de la superficie terrestre, la gravedad actúa sobre ella. La gravedad tira de ella hacia abajo con una fuerza $W = mg$.

La niña está en contacto con el piso del ascensor. Esta superficie podría ejercer una fuerza normal. Cualquier fuerza normal ejercida por el piso estaría dirigida hacia arriba, perpendicular al piso. No conocemos la magnitud de la fuerza. Cuando el ascensor comienza a subir, la niña se acelera hacia arriba, por lo que la fuerza normal debe ser mayor que la gravedad. Cuando el ascensor se detiene en el quinto piso, la niña se acelera hacia abajo, de modo que la fuerza normal debe ser menor que la gravedad.

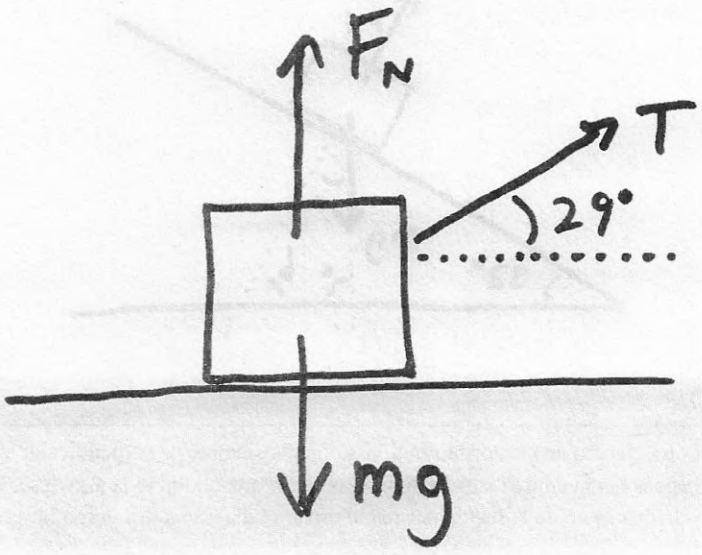
*LECCIÓN*

Siempre que en el diagrama de cuerpo libre aparezca una fuerza desconocida, asígnele un símbolo propio. Este símbolo es la magnitud de la fuerza.

**EJEMPLO**

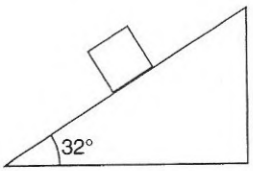
Una cuerda tira de una caja sobre un piso libre de fricción. La cuerda está 29° arriba de la horizontal. Trace un diagrama de cuerpo libre para la caja.

Hay una fuerza gravitacional *mg* dirigida hacia la Tierra. Una cuerda tira de la caja, así que agregamos una fuerza de tensión. La caja está en contacto con el piso, por lo que añadimos una fuerza normal a partir de éste. No conocemos la magnitud de la tensión ni de la fuerza normal, de modo que les asignamos símbolos.




**EJEMPLO**

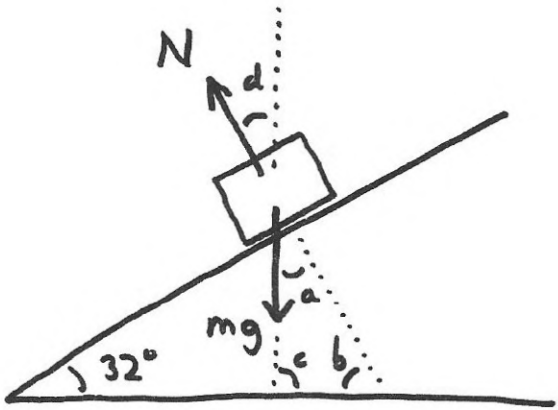
Una caja se coloca en una rampa libre de fricción a 32°. Trace un diagrama de cuerpo libre para la caja.




Una vez más, hay una fuerza gravitacional *mg* que va para abajo, hacia la Tierra. La caja está en contacto con la rampa, de modo que agregamos una fuerza normal en dirección perpendicular a la rampa. No conocemos la magnitud de la fuerza normal, por lo que le asignamos el símbolo *N*.

Determinar el sentido de las fuerzas es parte del diagrama de cuerpo libre. Se traza una línea a lo largo de la fuerza normal hasta el piso. Esta línea forma un triángulo con la rampa y el piso. Dado que la fuerza normal es perpendicular a la rampa, el ángulo *b* y 32° suman 90°. Hay otro triángulo formado por los ángulos *a*, *b* y *c*. Puesto que la gravedad es vertical, el ángulo *c* es recto, y los ángulos *b* y *a* suman 90°. Por lo tanto, el ángulo *a* mide 32° y el ángulo *d* también mide 32°.

No es posible que estas fuerzas se cancelen entre sí (esto es, que su suma sea cero). Por tanto, la aceleración de la caja no será cero. La caja no permanecería inmóvil en una superficie resbalosa (libre de fricción).

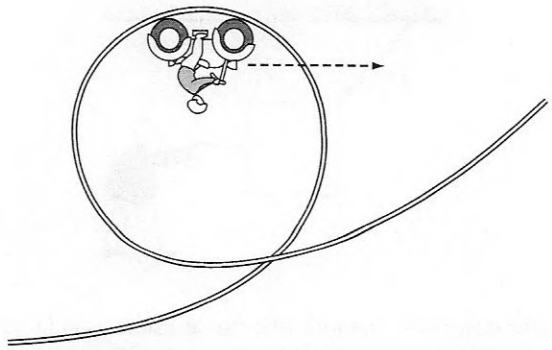



## *LECCIÓN*

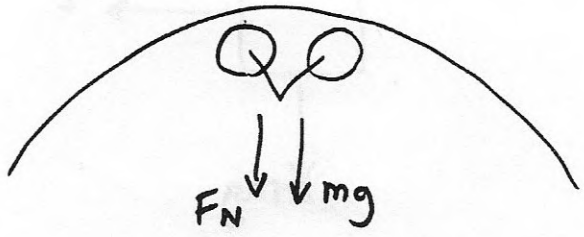
Las superficies ejercen una fuerza normal. Esta fuerza siempre es perpendicular a la superficie y tiene apenas la magnitud suficiente para impedir que el objeto la atraviese. Casi nunca conocemos la magnitud de la fuerza normal al trazar el diagrama de cuerpo libre.

**EJEMPLO**

Un motociclista se encuentra en la parte más alta de una pista en forma de bucle vertical. Trace un diagrama de cuerpo libre para el motociclista y su máquina (juntos) en la parte más alta del bucle.



Hay una fuerza gravitacional $mg$ dirigida verticalmente hacia la Tierra. Sólo hay una cosa en contacto con el motociclista y su máquina: la pista. La pista ejerce una fuerza normal $F_N$ perpendicular a ella misma.




En el punto más alto del bucle ambas fuerzas tienen sentido descendente. La motocicleta se acelera hacia abajo: no permanecerá en ese punto (no intente esto en casa).

*LECCIÓN*

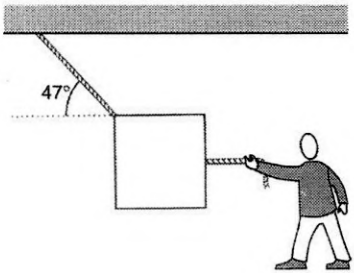
No debe darse por hecho que las fuerzas se cancelan entre sí.

**EJEMPLO**

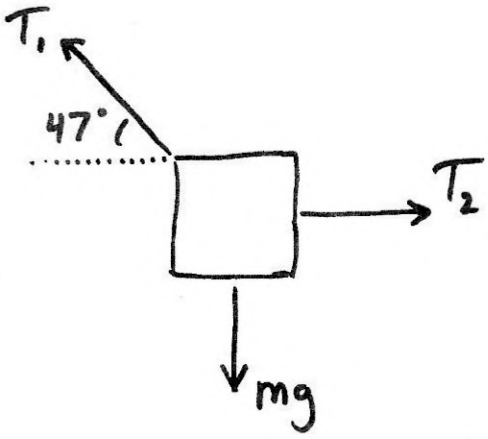
Un hombre levanta una caja del piso tirando de una cuerda, como se muestra. Trace un diagrama de cuerpo libre para la caja.

Hay una fuerza gravitacional $mg$ con sentido hacia abajo. La caja no está en contacto con ninguna superficie, así que no hay fuerzas normales. Dos cuerdas tiran de la caja, de modo que sumamos dos fuerzas de tensión.

¿Es obvio que las tensiones en las dos cuerdas deben ser iguales? Es posible que lo sean, pero no resulta claro que deban serlo. Si las magnitudes no son necesariamente las mismas, no podemos usar el mismo símbolo para las fuerzas. Podemos usar cuales-

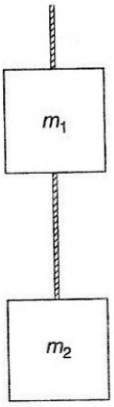



quiera símbolos que deseemos siempre que no se estén usando ya en el problema. Dado que se trata de dos tensiones, podemos elegir $T_1$ y $T_2$.




**EJEMPLO**

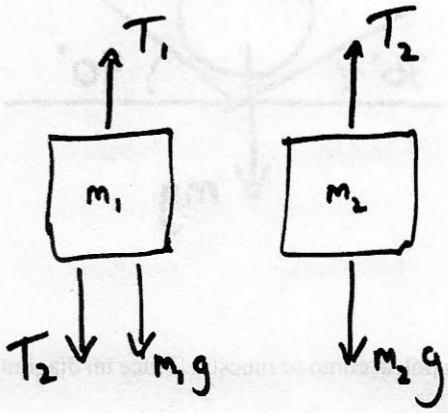
Una caja pende de una cuerda. Atada a la parte inferior de la caja hay otra cuerda, de la cual pende a su vez una segunda caja. Desprecie la masa de las cuerdas y trace diagramas de cuerpo libre para las dos cajas.



Cada caja tiene masa, de modo que la gravedad tira de cada una de ellas. No se nos dice que las masas de las cajas sean iguales, así que necesitamos símbolos diferentes para las dos masas, digamos $m_1$ y $m_2$. Los pesos de las cajas son por tanto $m_1g$ y $m_2g$.

La cuerda superior tira de la caja superior hacia arriba y la cuerda inferior tira de la misma caja hacia abajo. Las fuerzas no necesariamente tienen que ser iguales, por lo que elegimos símbolos diferentes para la magnitud de estas fuerzas, $T_1$ y $T_2$.

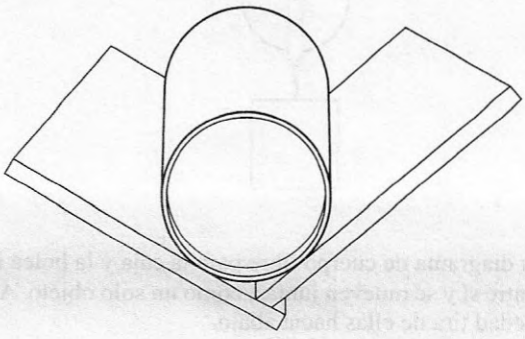
La cuerda inferior tira de la caja inferior hacia arriba. ¿Esta fuerza es necesariamente igual a alguna de las otras tensiones? La tensión es la misma en cualquier punto a lo largo de la cuerda inferior, así que la fuerza que tira de la caja inferior hacia arriba es $T_2$.



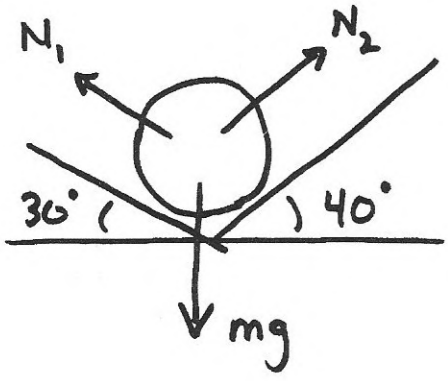

¿Por qué es la tensión la misma a lo largo de toda la cuerda? Si la cuerda carece de masa (se compró en la tienda de física teórica), entonces el producto de su masa por la aceleración debe ser cero, cualquiera que sea la aceleración, así que la fuerza total en la cuerda es cero. La fuerza que tira de la cuerda hacia arriba es la misma que tira de ella hacia abajo.

**EJEMPLO**

Una lata descansa entre dos tablas, las cuales están a 30° y 40° de la horizontal. Trace un diagrama de cuerpo libre para la lata.

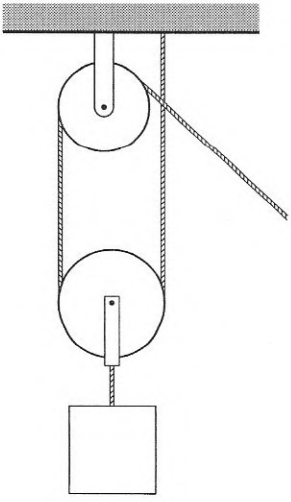


Hay una fuerza de gravedad *mg* dirigida hacia abajo. La lata está en contacto con dos superficies, cada una de las cuales ejerce una fuerza normal sobre ella. ¿Tienen la misma magnitud las dos fuerzas normales? No hay una razón para que deba ser así. Dado que no sabemos que tienen la misma magnitud, les asignamos símbolos diferentes: $N_1$ y $N_2$.



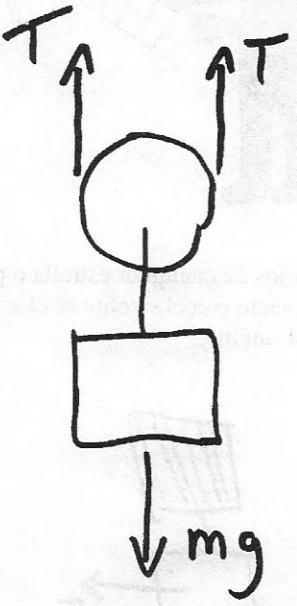

**EJEMPLO**

Una caja pende de una polea, como se muestra. Trace un diagrama de cuerpo libre para la caja y la polea inferior.



Podemos trazar un diagrama de cuerpo libre para la caja y la polea inferior juntas porque están unidas entre sí y se mueven juntas, como un solo objeto. Ambas tienen masa, por lo cual la gravedad tira de ellas hacia abajo.

El único objeto en contacto con la caja y la polea es la cuerda. La tensión es la misma a todo lo largo de la cuerda, de modo que asignamos el mismo símbolo $T$ a las dos cuerdas que suben desde la polea.




Existen casos parecidos en que las dos tensiones difieren entre sí. En tales casos interviene una polea con masa y aceleración diferentes de cero.

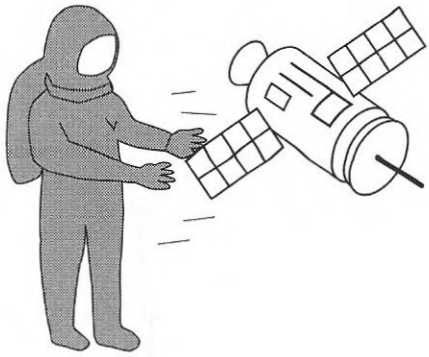
*LECCIÓN*

Puede asignarse el mismo símbolo a dos o más fuerzas sólo si sabemos que deben tener la misma magnitud.

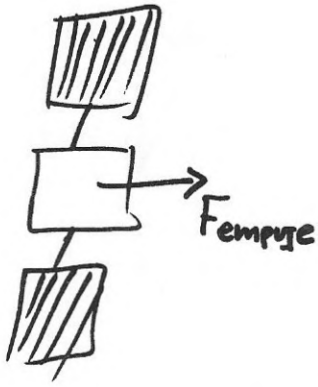
La tercera ley de Newton es: "Si $\mathcal{A}$ empuja a $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ empuja a $\mathcal{A}$". Por ejemplo, un libro está sobre una mesa. La Tierra tira del libro hacia abajo con una fuerza gravitacional $mg$. La tercera ley de Newton establece que el libro tira de la Tierra hacia arriba con una fuerza $mg$, de la misma magnitud pero en sentido opuesto. Es cierto que la mesa empuja el libro hacia arriba con una fuerza normal, y también es cierto que a veces esta fuerza es igual y opuesta a la gravedad (si no hay otras fuerzas y $a = 0$). Incluso si la fuerza normal es igual y opuesta a la gravedad, no es esta fuerza a la que hace referencia Newton en su tercera ley.

**EJEMPLO**

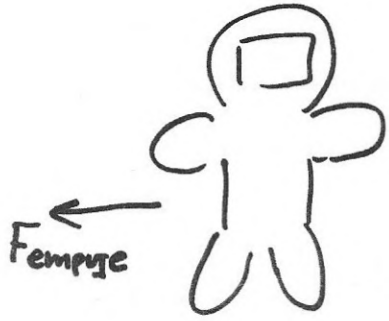
En el espacio exterior, un astronauta empuja un satélite de 600 kg con una fuerza de 100 N. Trace un diagrama de cuerpo libre para el satélite.



En el espacio exterior, muy lejos de cualquier estrella o planeta, no hay fuerza de gravedad. El único objeto en contacto con el satélite es el astronauta, así que incluimos la fuerza con que éste empuja el satélite.




¿Dónde está la fuerza igual y de sentido opuesto que se menciona en la tercera ley? Si el astronauta empuja el satélite, entonces el satélite empuja al astronauta. He aquí el diagrama de cuerpo libre para el astronauta.



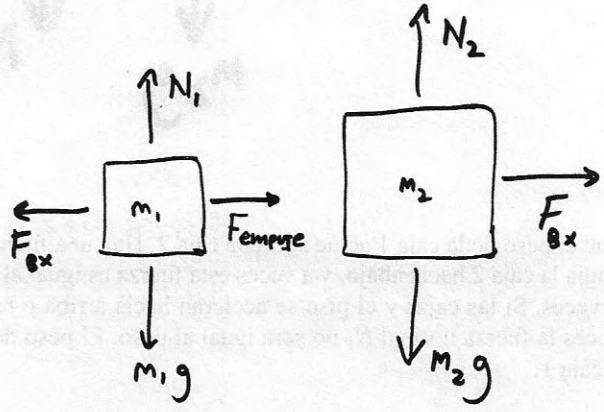
**EJEMPLO**

Dos cajas reposan en un piso libre de fricción. Juan empuja la caja de la izquierda hacia la derecha. Trace un diagrama de cuerpo libre para las cajas.

Cada caja tiene masa, de modo que cada una tiene una fuerza gravitacional. Dado que no sabemos que las cajas tengan la misma masa, utilizamos $m_1$ y $m_2$ para las masas y $m_1g$ y $m_2g$ para las fuerzas gravitacionales. Ambas cajas están en contacto con el piso, de modo que ambas podrían estar sujetas a la acción de una fuerza normal. Las fuerzas normales podrían no tener la misma magnitud, así que usamos los símbolos $N_1$ y $N_2$ para ellas.

Juan empuja la caja de la izquierda hacia la derecha y si no hay otras fuerzas horizontales, la caja se acelerará hacia la derecha. ¿Qué impide que las dos cajas ocupen el mismo espacio? La caja de la izquierda empuja la caja derecha hacia la derecha, de modo que ambas se aceleran juntas. Llamamos a esta fuerza $F_{BX}$.

Newton establece que si la caja 1 empuja la caja 2 hacia la derecha, entonces la caja 2 empuja la caja 1 hacia la izquierda. Estas fuerzas son iguales y opuestas, de modo que ambas tienen la magnitud $F_{BX}$. En la caja de la izquierda trazamos una fuerza dirigida hacia la izquierda, a la que llamamos $F_{BX}$.



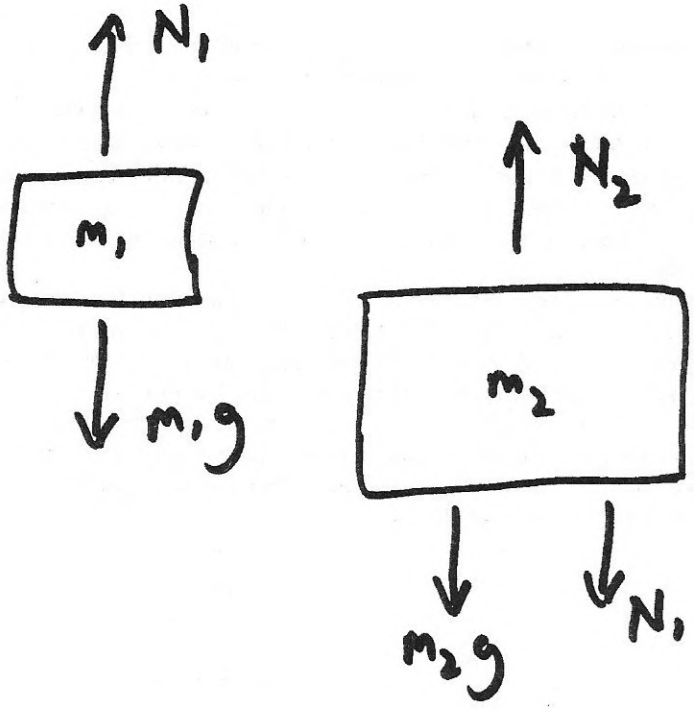

**EJEMPLO**

La caja 1 está encima de la caja 2, la cual se encuentra en el piso. Trace un diagrama de cuerpo libre para las cajas.

Cada caja tiene masa, de modo que cada una tiene una fuerza gravitacional. Dado que las cajas tienen distintas masas, necesitamos diferentes fuerzas gravitacionales $m_1g$ y $m_2g$.

La caja 1 está en contacto con la caja 2, de modo que hay una fuerza normal $N_1$ que empuja la caja 1. Esta fuerza es perpendicular y ascendente ejercida por la parte superior de la caja 2. Como de costumbre, no conocemos la magnitud de esta fuerza normal.

La caja 2 está en contacto con el piso, así que hay una fuerza normal que empuja esa caja hacia arriba. Esta fuerza no necesariamente es igual a $N_1$ que empuja la caja 1, de modo que le asignamos un símbolo diferente, $N_2$. La caja 2 también está en contacto con la caja 1. Dado que la caja 2 empuja hacia arriba la caja 1 con la fuerza $N_1$, la caja 1 empuja hacia abajo la caja 2 con la fuerza $N_1$.




No es cierto que el peso de la caja 1 actúe sobre la caja 2. Hay una fuerza normal de la caja 1 que empuja la caja 2 hacia abajo, y a veces esta fuerza es igual al peso de la caja 1, pero sólo a veces. Si las cajas y el piso se aceleran hacia arriba o hacia abajo, por ejemplo, entonces la fuerza normal $N_1$ no será igual al peso. El peso de la caja 1 sólo actúa sobre la caja 1.

*LECCIÓN*

Las fuerzas iguales y opuestas de la tercera ley de Newton nunca actúan sobre el mismo objeto.

## 3.2 RESOLUCIÓN DE *F* = *ma*

La segunda ley de Newton establece que si sumamos todas las fuerzas que actúan sobre un objeto, obtendremos la masa por la aceleración. Ahora que tenemos una lista completa de las fuerzas (el diagrama de cuerpo libre), podemos sumarlas. Es necesario tener presente que algunas de las fuerzas pueden ser desconocidas, pero podemos sumarlas en su forma simbólica y quizá las obtengamos más tarde.

Siempre que se analiza una fuerza, se comienza haciendo un diagrama de cuerpo libre. El siguiente paso consiste en elegir un sistema de coordenadas. Si todas las fuer-

zas son colineales (paralelas o antiparalelas), esto es lo mismo que elegir el sentido positivo en un problema de aceleración constante. A menudo las fuerzas no son colineales y deberemos elegir un par de ejes (o tres). En tal caso es vital que los ejes sean perpendiculares entre sí, para que podamos aplicar todas nuestras técnicas vectoriales. Cualquier conjunto de ejes perpendiculares servirá, pero algunos son más fáciles de manejar que otros. El álgebra será mucho más fácil de resolver si la aceleración es paralela a uno de los ejes.

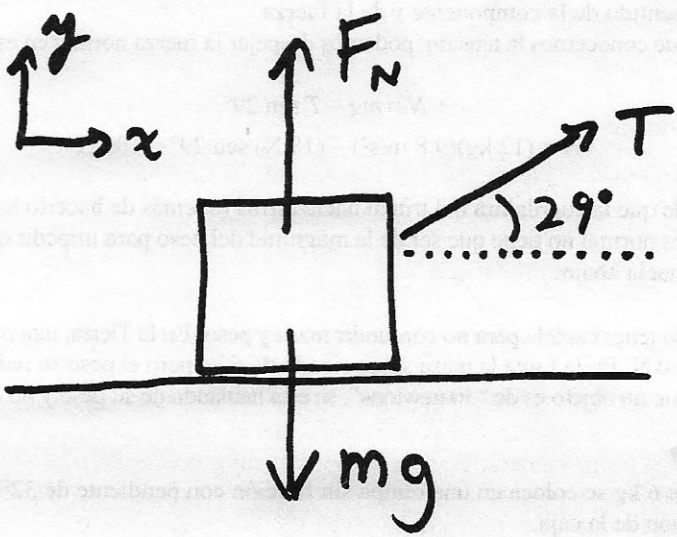
Un buen conjunto de ejes debe poseer las siguientes características:

- Basta un eje si todas las fuerzas son paralelas y dos si todas las fuerzas están en el mismo plano; en otros casos se requieren tres ejes.
- Cada eje debe ser perpendicular a los demás.
- Cada eje debe tener un nombre específico (como $x$ o $y$).
- Cada eje debe tener su sentido positivo claramente indicado.
- De ser posible, se debe alinear un eje paralelo a la aceleración.

Después de elegir los ejes, tomamos cada vector y lo dividimos en sus componentes. Entonces sumamos todas las componentes que son paralelas a uno de los ejes. Hacemos esta suma igual a la masa por la aceleración a lo largo de ese eje. Es de esperar que obtengamos una ecuación que podamos resolver, pero en caso contrario podemos intentar con el otro eje.

**EJEMPLO**

Un niño tira de un trineo de 12 kg sobre un suelo helado y sin fricción por medio de una cuerda. La cuerda está 29° arriba de la horizontal y tiene 18 N de tensión. ¿Cuál es la aceleración del trineo?



Comenzamos trazando el diagrama de cuerpo libre. Después elegimos los ejes: la aceleración del trineo va hacia la derecha, así que éste será nuestro sentido positivo en el eje $x$. Necesitamos un segundo eje, perpendicular al primero, de modo que elegimos el sentido ascendente como el positivo en el eje $y$.

Puesto que queremos determinar la aceleración y ésta actúa en la dirección $x$, sumamos todas las fuerzas que se encuentran en esta dirección.

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$
$$F_x = ma_x$$
$$+T\cos 29^\circ = ma_x$$

Sólo parte de la tensión se ejerce en el eje $x$, de manera que debemos encontrar la componente $x$. La parte que queremos es el cateto adyacente al ángulo, por lo que usamos el coseno de 29°. El signo positivo de $T$ indica que la componente $x$ de $T$ está en el sentido $+x$ y no en el sentido $-x$.

Podemos despejar la aceleración en esta ecuación.

$$+(18\text{ N})\cos 29^\circ = (12\text{ kg})a_x$$
$$a_x = \frac{(18\text{ N})\cos 29^\circ}{(12\text{ kg})} = +1.3\text{ m/s}^2$$

Advierta que la letra N (como en 18 N) es la unidad newton, mientras que la variable $N$ es la magnitud de la fuerza normal. Ahora sumamos las fuerzas en la dirección $y$ (básicamente para practicar).

$$F_y = ma_y$$
$$+T\,\text{sen}\,29^\circ + N - mg = ma_y = 0$$

Recuerde que $T$, $N$ y $mg$ son magnitudes, de modo que los signos que las anteceden indican el sentido de la componente $y$ de la fuerza.

Dado que conocemos la tensión, podemos despejar la fuerza normal en esa ecuación.

$$+N = mg - T\,\text{sen}\,29^\circ$$
$$+N = (12\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) - (18\text{ N})\,\text{sen}\,29^\circ = 109\text{ N}$$

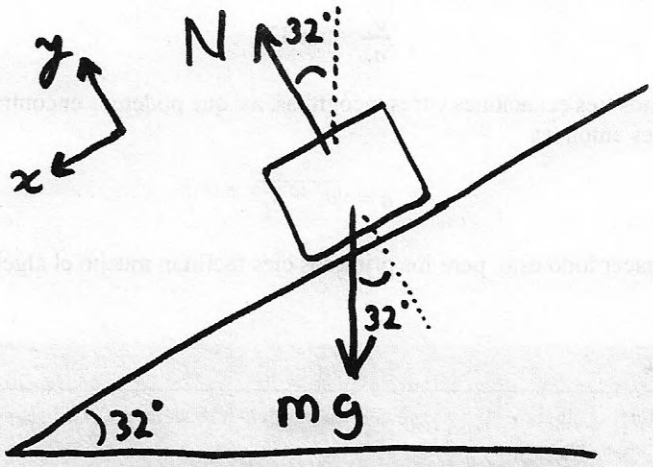
En virtud de que la cuerda tira del trineo hacia arriba (además de hacerlo hacia el frente), la fuerza normal no tiene que ser de la magnitud del peso para impedir que el trineo se acelere hacia abajo.

Es necesario tener cautela para no confundir masa y peso. En la Tierra, una masa de 6 kg pesa unos 60 N. En la Luna la masa sigue siendo de 6 kg pero el peso se reduce a 10 N. Si se dice que un objeto es de "30 newtons", se está hablando de su peso y no de su masa.

**EJEMPLO**

Una caja de 6 kg se coloca en una rampa sin fricción con pendiente de 32°. Encuentre la aceleración de la caja.

Comenzamos trazando un diagrama de cuerpo libre. Después elegimos los ejes: la aceleración de la caja es hacia abajo de la rampa (hacia abajo y a la izquierda en el diagrama), de modo que llamamos a esta dirección el eje $x$. Necesitamos un segundo eje, perpendicular al primero, así que una línea perpendicular a la rampa será nuestro eje $y$.




Dado que deseamos conocer la aceleración y ésta se encuentra en la dirección $x$, sumamos todas las fuerzas en la dirección $x$.

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$
$$F_x = ma_x$$
$$+mg \text{ sen } 32^\circ = ma_x$$
$$a_x = (9.8 \text{ m/s}^2) \text{ sen } 32^\circ = 5.2 \text{ m/s}^2$$

La masa se cancela, de modo que la aceleración no depende de la masa. ¿Por qué? Si la masa de la caja se duplica, también lo hace la fuerza gravitacional, pero tiene el doble de masa que desplazar, así que la aceleración es la misma. Ésta es la causa de que todo caiga con la misma aceleración.

Ahora sumemos las fuerzas en la dirección $y$ (una vez más para practicar).

$$F_y = ma_y$$
$$-N - mg \cos 32^\circ = ma_y = 0$$
$$N = mg \cos 32^\circ = (6 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \cos 32^\circ = 50 \text{ N}$$

¿Y si no hubiéramos usado estos ejes, sino los más tradicionales $x$ horizontal y $y$ vertical?

$$F_x = ma_x$$
$$-N \text{ sen } 32^\circ = ma_x$$
$$F_y = ma_y$$
$$+N \cos 32^\circ - mg = ma_y$$

No podemos resolver ninguna de las ecuaciones para la aceleración porque no conocemos la fuerza normal. No podemos resolver simultáneamente las dos ecuaciones para $a$ y $N$ porque hay dos variables para la aceleración: tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. Necesitamos una tercera ecuación, la cual se deriva del hecho de que la aceleración está a lo largo de la rampa.

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan 32°$$

Ahora tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas, así que podemos encontrar $a_x$ y $a_y$. La aceleración es entonces

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

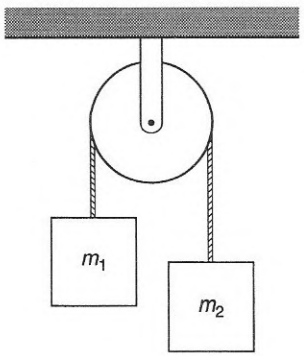
Podríamos hacer todo esto, pero los primeros ejes facilitan mucho el álgebra.

*LECCIÓN*

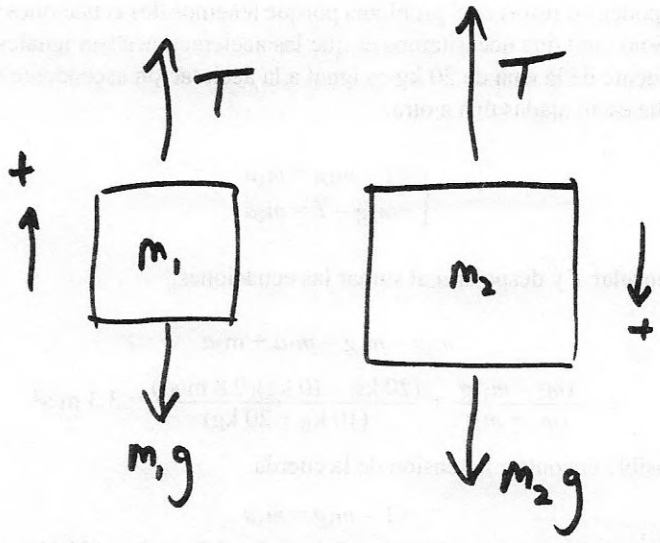
Para simplificar el álgebra, elija un eje que sea paralelo a la aceleración. El segundo eje debe ser perpendicular al primero.

**EJEMPLO**

Dos cajas están unidas por una cuerda sin masa que pende de una polea sin masa y sin fricción. Las masas de las cajas son de 10 kg y 20 kg. ¿Cuál es la aceleración de cada caja? (Esta configuración se conoce como la máquina de Atwood.)




Cada caja tiene masa, de modo que la gravedad tira de cada una. Las masas no son iguales, por lo cual las designaremos $m_1$ y $m_2$, donde $m_1 = 10$ kg y $m_2 = 20$ kg. Cada caja tiene también una cuerda que tira de ella hacia arriba, de modo que hay una fuerza de tensión sobre cada caja. Estas fuerzas de tensión serán iguales siempre que la cuerda y la polea carezcan de masa y de fricción, así que designamos ambas $T$. (Para que las tensiones sean iguales sólo necesitamos que la cuerda carezca de masa y que se cumpla una de las demás condiciones; volveremos a este punto más adelante.)




Dado que la masa de la derecha es más pesada, esperamos que $m_2$ se acelere hacia abajo y $m_1$ se acelere hacia arriba. Por lo tanto, las elegimos como el sentido positivo en cada caso: hacia arriba en el lado izquierdo y hacia abajo en el derecho. ¿Podemos tener dos sistemas de coordenadas distintos en el mismo problema? Sí, cada objeto puede tener su propio sistema de coordenadas, pero debemos tener cuidado de ser consistentes.

Antes de comenzar los cálculos, se consideran los valores posibles de $T$. Si $T$ fuera igual al peso de la caja de 10 kg, entonces la fuerza total ejercida sobre esa caja sería cero, por lo que no se aceleraría. Pero la fuerza total ejercida sobre la caja de 20 kg sería descendente, así que esa caja sí se aceleraría. ¿Pueden ser ciertas ambas afirmaciones? No. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza de tensión es un valor intermedio entre los pesos de las dos cajas (no necesariamente el valor medio).

Sumemos las fuerzas que actúan sobre la caja de 10 kg.

$$F = ma$$
$$+\mathrm{T} - m_1 g = m_1 a_1$$

¿Podemos resolver estas ecuaciones para encontrar la aceleración? No, porque no conocemos la tensión. Intentemos entonces con la caja de 20 kg.

$$F = ma$$
$$+m_2 g - T = m_2 a_2$$

Recuerde que $T$ y $mg$ son magnitudes, de modo que los signos que las preceden indican el sentido de las fuerzas. Para la caja de la derecha, el sentido positivo es el descendente. La fuerza gravitacional es descendente, por lo que es positiva, y la tensión es ascendente, por lo que es negativa. $T$ y $mg$ deben ser valores positivos porque son magnitudes.

Aún no podemos resolver el problema porque tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. El último dato que necesitamos es que las aceleraciones son iguales: la aceleración descendente de la caja de 20 kg es igual a la aceleración ascendente de la caja de 10 kg, porque están atadas una a otra.

$$\begin{cases} +T - m_1 g = m_1 a \\ +m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

Podemos cancelar $T$ y despejar $a$ al sumar las ecuaciones.

$$m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} = \frac{(20\text{ kg} - 10\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{(10\text{ kg} + 20\text{ kg})} = 3.3\text{ m/s}^2$$

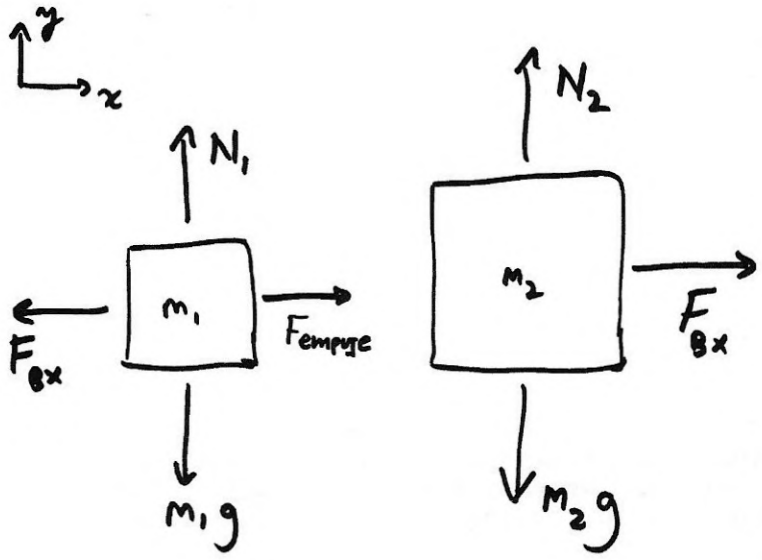
Ahora es posible encontrar la tensión de la cuerda.

$$+T - m_1 g = m_1 a$$
$$T = m_1 a = m_1 g = (10\text{ kg})(3.3\text{ m/s}^2 + 9.8\text{ m/s}^2) = 131\text{ N}$$

Éste no es el valor medio de los pesos de las cajas, sino que es cercano al peso de la caja más pequeña. La fuerza total sobre la caja de la derecha debe ser del doble de la fuerza total sobre la caja de la izquierda para que tengan la misma aceleración.

**EJEMPLO**

Dos cajas de 20 kg y 40 kg reposan en un piso sin fricción. Juan empuja la caja de la izquierda hacia la derecha con una fuerza de 17 N. Encuentre la aceleración de cada caja.



Comenzamos trazando un diagrama de cuerpo libre. Después seleccionamos los ejes: la aceleración de las cajas está dirigida hacia la derecha, de modo que éste será el sentido positivo del eje $x$. Necesitamos un segundo eje, perpendicular al primero, por lo cual el sentido vertical ascendente será el eje $y$ positivo.

Dado que queremos encontrar la aceleración y ésta se encuentra en el eje $x$, sumamos todas las fuerzas que actúan en esa dirección sobre la caja de la izquierda ($m_1$).

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$
$$F_x = ma_x$$
$$+17\text{ N} - F_{BX} = m_1 a_{1,x}$$

No podemos resolver estas ecuaciones porque no conocemos $F_{BX}$.

Sumamos todas las fuerzas que actúan en la dirección $x$ sobre la caja de la derecha ($m_2$).

$$F_x = ma_x$$
$$+F_{BX} = m_2 a_{2,x}$$

Tampoco podemos resolver estas ecuaciones.

Sin embargo, la aceleración de las dos cajas es la misma. Si no lo fuera, la caja de la izquierda atravesaría la caja de la derecha al acelerar o la caja de la derecha se alejaría de la izquierda al hacer lo propio. Entonces

$$\begin{cases} +17\text{ N} - F_{BX} = m_1 a \\ +F_{BX} = m_2 a \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones.

$$17\text{ N} = (m_1 + m_2)a$$

Esto es lo mismo que habríamos obtenido de haber considerado las cajas como un solo objeto. En tanto se muevan juntas, podremos tratarlas como una sola caja grande.

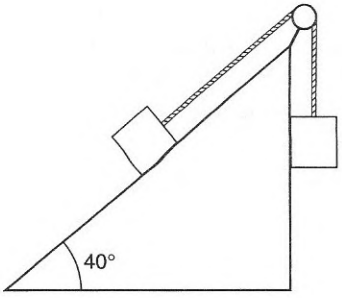
$$a = \frac{17\text{ N}}{(m_1 + m_2)} = \frac{17\text{ N}}{20\text{ kg} + 40\text{ kg}} = 0.28\text{ m/s}^2$$

*LECCIÓN*

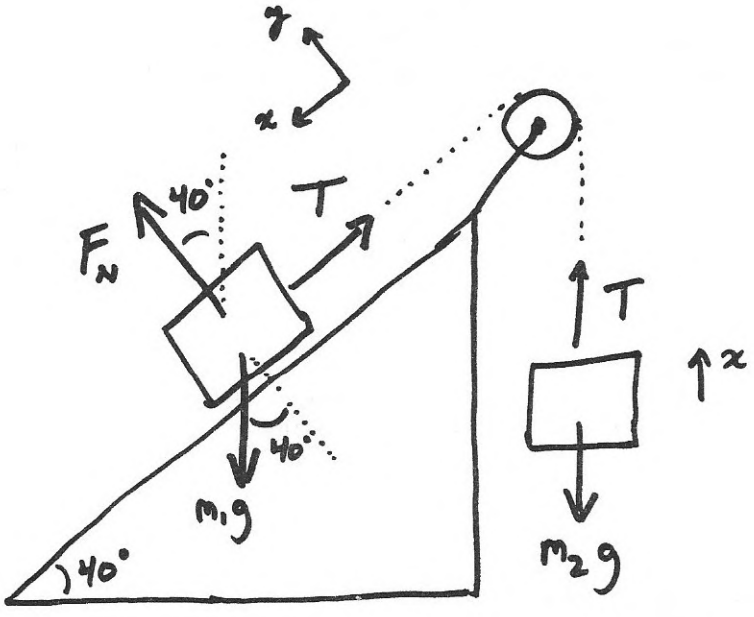
Cuando dos objetos interactúan, la tercera ley de Newton nos permite afirmar que las dos fuerzas tienen la misma magnitud.

**EJEMPLO**

Una caja de 6 kg está sobre una rampa sin fricción con pendiente de 40°. Está unida a una caja de 4 kg mediante una cuerda sin masa y sin fricción. ¿Cuál es la aceleración de cada caja?




Cada caja tiene masa, de modo que sobre ambas actúa la gravedad. Las masas no son iguales, así que las designaremos $m_1$ y $m_2$, donde $m_1 = 6$ kg y $m_2 = 4$ kg. Una cuerda tira de ambas cajas, de modo que hay una fuerza de tensión sobre cada una de ellas. Esas fuerzas de tensión serán iguales siempre que la cuerda carezca de masa y de fricción, así que designamos ambas $T$. La caja de la izquierda está en contacto con una superficie, la rampa, por lo que incluimos la fuerza normal desconocida $N$.




La aceleración de la caja de la izquierda estará a lo largo de la rampa, mientras que la aceleración de la caja de la derecha será vertical. ¿Hacia dónde se moverán las cajas? Si la caja de la derecha fuera mucho más pesada, se aceleraría hacia abajo, pero si fuera mucho más ligera, entonces se aceleraría hacia arriba. Dado que las dos masas son comparables (casi iguales), no es inmediatamente obvio hacia dónde se desplazarán.

¿Cuál sentido debemos elegir como nuestro eje $x$ positivo? Si elegimos el sentido descendente de la rampa y la aceleración de $m_1$ resulta ser ascendente, entonces obten-

dremos un valor negativo. Obtener valores negativos fue un resultado común en el capítulo anterior; no hay problema en tanto usemos los ejes de manera consistente. Teniendo esto presente, usaremos el sentido descendente de la rampa como el sentido positivo de $x$ para $m_1$ y el sentido ascendente de la rampa como el sentido positivo de $x$ para $m_2$. De este modo ambas se aceleran en el mismo sentido, sea $+x$ o $-x$.

Sumemos las fuerzas que actúan sobre $m_1$ en la dirección $x$.

$$F_x = ma_x$$
$$+m_1 g \text{ sen } 40^\circ - T = m_1 a_x$$

No podemos resolver estas ecuaciones porque no conocemos la tensión, así que intentamos con $m_2$. Para $m_2$ el sentido positivo de $x$ es verticalmente hacia arriba.

$$F_x = ma_x$$
$$+T - m_2 g = m_2 a_x$$

Podemos eliminar $T$ y despejar $a_x$ sumando las ecuaciones.

$$m_1 g \text{ sen } 40^\circ - m_2 g = m_1 a_x + m_2 a_x$$

$$a_x = \frac{(m_1 \text{ sen } 40^\circ - m_2)g}{(m_1 + m_2)} = \frac{[(6 \text{ kg}) \text{ sen } 40^\circ - (4 \text{ kg})](9.8 \text{ m/s}^2)}{(6 \text{ kg} + 4 \text{ kg})} = -0.14 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo en nuestro resultado significa que la aceleración es hacia arriba en la rampa ($m_1$) y hacia abajo verticalmente ($m_2$). ¿Significa esto que fue equivocada nuestra elección de los ejes? No. Cualquiera de las dos elecciones habría funcionado igualmente bien. Sólo significa que la aceleración está en el sentido opuesto al que elegimos como positivo.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

Siempre que maneje fuerzas:

- Trace un diagrama de cuerpo libre.
- Elija uno de los ejes paralelo a la aceleración.
- Sume las fuerzas en cada dirección e iguale la suma con *ma*.
- Resuelva a partir de ahí.

Recuerde:

- La fuerza normal es perpendicular a la superficie.
- No conocemos la magnitud de la fuerza normal; no siempre es igual al peso.
- Las fuerzas "iguales y opuestas" de la tercera ley de Newton nunca actúan sobre el mismo objeto.

CAPÍTULO 4

# *FUERZAS: SUS EFECTOS*

Las fuerzas constituyen un tema demasiado amplio para cubrirlo en un solo capítulo. El objetivo del capítulo anterior fue desarrollar la técnica correcta para usar las leyes de Newton. Aquí ampliaremos el tema agregando una nueva fuerza y otra variable que no es una fuerza.

La fricción puede ser un tanto engañosa. En particular, el sentido de la fuerza de fricción no siempre es evidente. Cuando trace un diagrama de cuerpo libre, considere la fricción al final. Cada vez que encuentre una fuerza normal podría haber una fuerza de fricción asociada. Haga una nota al respecto (mental o por escrito), considere todas las otras fuerzas y después vuelva a la fuerza de fricción.

El otro tema que se introduce en este capítulo es el del movimiento circular y la aceleración centrípeta. Si el lector viaja en un automóvil y éste da vuelta a la izquierda, es muy probable que sienta que una "fuerza" lo lleva hacia la derecha. Algunos llaman a esto fuerza centrípeta. En realidad no existe tal fuerza, como veremos.

Considere lo que sucede desde el punto de vista de un peatón que pase por ahí. Si usted conduce en línea recta y frena, podría pensar que es lanzado al frente. El peatón sabe que usted está continuando su movimiento en línea recta mientras el automóvil frena. Cuando usted da vuelta a la izquierda en el automóvil, podría pensar que es lanzado a la derecha. El peatón sabe que usted está continuando su movimiento en línea recta mientras el automóvil da vuelta.

## 4.1 FUERZAS DE FRICCIÓN

Siempre que un objeto está en contacto con una superficie puede haber presente una fuerza normal. Siempre que hay una fuerza normal, puede haber presente una fuerza de fricción. La fuerza de fricción siempre es paralela a la superficie.

La fricción no se opone al movimiento; se opone al deslizamiento de una superficie contra otra. Imagine el lector que coloca sacos de arena en la caja de una camioneta de carga. Usted arroja un saco en la caja de la camioneta y cuando el saco golpea el fondo de la caja se mueve hacia delante. El saco se desliza sobre la lámina, pero la fricción se opone al deslizamiento, frenando el saco hasta detenerlo. Una vez que la camioneta está cargada, usted la conduce. Si no hubiera fricción entre el piso de la caja de carga y el saco de arena, entonces éste permanecería en su lugar mientras el vehículo se mueve debajo de él. La fricción empuja el saco hacia delante junto con la camioneta: la fricción causa el movimiento al impedir el deslizamiento.

Existen dos tipos de fricción: la cinética y la estática. La **fricción cinética** ocurre cuando dos superficies se deslizan una contra la otra. La fuerza de fricción que detiene el saco luego de que usted lo arroja a la caja de carga es fricción cinética. La **fricción estática** ocurre cuando dos superficies no están deslizándose todavía una contra otra.

La fuerza de fricción que acelera el saco de arena junto con el vehículo es fricción estática. Ésta intenta impedir que ocurra el deslizamiento, mientras que la fricción cinética intenta detenerlo cuando ya está ocurriendo. Los dos tipos de fricción tienen nombres distintos porque actúan de modo distinto.

La magnitud de la fricción cinética es

$$\mathcal{F}_k = \mu_k N$$

donde $N$ es la magnitud de la fuerza normal entre las dos superficies. El símbolo $\mu k$ es el coeficiente de fricción cinética, una constante que depende de las dos superficies. El sentido de la fuerza de fricción cinética siempre es tal que frena el deslizamiento entre las superficies.

El sentido de una fuerza de fricción estática siempre es tal que impide el deslizamiento entre las superficies. La magnitud de la fricción estática es tan grande como se requiera para impedir el deslizamiento, hasta cierto límite. La magnitud de la fuerza de fricción estática es

$$\mathcal{F}_s \leq \mu_s N$$

donde $N$ es la magnitud de la fuerza normal entre las dos superficies y $\mu_s$ es el coeficiente de fricción estática.

Consideremos de nuevo el saco de arena en la camioneta. Después de que el saco se ha colocado en la caja de carga, pero antes de que la camioneta comience a moverse, el saco está inmóvil en el vehículo sin experimentar deslizamiento. Dado que el saco no está deslizándose (aún), la fuerza de fricción es estática. ¿Cuánta fricción estática es necesaria para impedir el deslizamiento? En el saco no actúan fuerzas horizontales aparte de la fricción, así que no se necesita una fuerza de fricción. Si hubiera una fuerza de fricción, ésta haría que el saco se moviera y comenzara a deslizarse sobre el piso de la caja de carga. De modo que la fuerza de fricción es cero mientras la camioneta no se mueve.

En los dos capítulos previos vimos fuerzas y diagramas de cuerpo libre, pero ¿por qué reservamos hasta este punto la fricción? Cuando las superficies ya están deslizándose entre sí y la fricción es cinética, no es difícil determinar el sentido de la fuerza de fricción. Cuando las superficies no están deslizándose todavía y la fricción es estática, puede ser complicado determinar el sentido de la fuerza de fricción estática. Lo mejor es considerar todas las demás fuerzas en el diagrama de cuerpo libre antes de incluir la fricción.

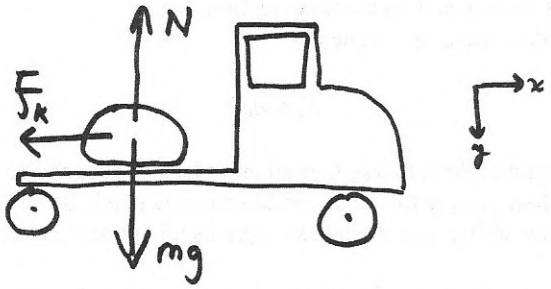
**EJEMPLO**

El lector arroja un saco de arena de 8 kg en la caja de una camioneta de carga. El saco se pone en contacto con la caja moviéndose horizontalmente con una rapidez de 1.2 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el saco de arena y el vehículo es de 0.46. ¿Qué distancia se desliza el saco de arena antes de detenerse?

Conocemos las velocidades inicial y final. Si conociéramos la aceleración (constante), entonces podríamos usar nuestra técnica "tres de cinco" para determinar el desplazamiento. Para encontrar la aceleración sumamos las fuerzas y usamos la segunda ley de Newton.

El saco de arena tiene masa, de modo que hay una fuerza gravitacional. Está en contacto con el piso de la caja del vehículo, así que podría haber una fuerza normal. Se

desliza hacia el frente de la camioneta, por lo que hay una fuerza de fricción cinética que empuja el saco hacia la parte trasera del vehículo, en contra del deslizamiento.




La aceleración va a la izquierda a lo largo del piso de la caja de carga; consideraremos positivos los sentidos hacia la derecha en el eje $x$ y hacia abajo en el eje $y$. Queremos encontrar $a_x$, de modo que sumamos las fuerzas en la dirección $x$.

$$F_x = ma_x$$
$$-\mathcal{F}_k = ma_x$$

Dado que la fricción es cinética, la magnitud de la fuerza de fricción es igual al coeficiente de fricción por la fuerza normal.

$$\mathcal{F}_k = \mu_k N \quad \rightarrow \quad -\mu_k N = ma_x$$

Necesitamos encontrar la fuerza normal $N$, por lo que sumamos todas las fuerzas en la dirección $y$.

$$F_y = ma_y$$
$$+mg - N = ma_y = m(0) = 0$$
$$N = mg$$

Como el eje $x$ es paralelo a la aceleración, la aceleración en la dirección $y$ es cero. Sólo hay dos fuerzas en la dirección $y$ y ninguna aceleración, de modo que las fuerzas son iguales y se cancelan entre sí.

$$-\mu_k (mg) = ma_x$$
$$a_x = -\mu_k g = -(0.46)(9.8 \text{ m/s}^2) = -4.5 \text{ m/s}^2$$

¿Por qué se cancela la masa? Si la masa del saco se duplicara, su peso y su fuerza normal se duplicarían, así que la fuerza de fricción se duplicaría, pero esa fuerza actuaría sobre el doble de masa y por lo tanto la aceleración sería la misma.

Ahora podemos resolver el problema de aceleración constante:

$$x = ?$$
$$v_0 = +1.2 \text{ m/s}$$
$$v = 0$$
$$a = -4.5 \text{ m/s}^2$$
$$t =$$

No nos interesa el tiempo, así que elegimos $v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Delta x = \frac{(0)^2 - (1.2\ \text{m/s})^2}{2(-4.5\ \text{m/s}^2)}$$

$$\Delta x = 0.16\ \text{m}$$

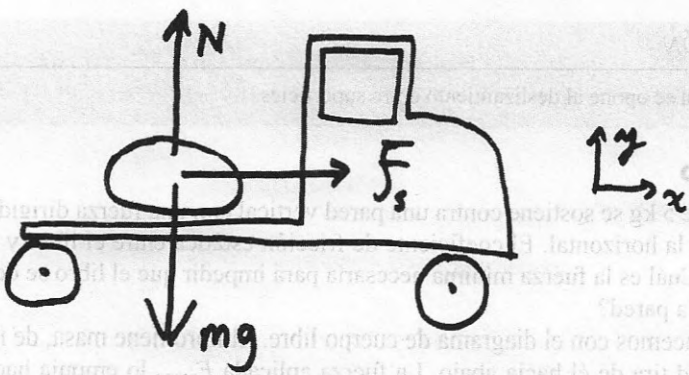
**EJEMPLO**

Un saco de arena de 8 kg está en la caja de una camioneta de carga. El coeficiente de fricción estática entre el saco y el vehículo es de 0.56. ¿Cuál es la aceleración máxima que la camioneta puede alcanzar de modo que el saco no se deslice sobre la caja?

Sumamos las fuerzas y utilizamos la segunda ley de Newton para encontrar la aceleración. El saco de arena tiene masa, de modo que actúa una fuerza gravitacional. Está en contacto con el piso de la caja de carga, así que podría haber una fuerza normal. Si hay una fuerza normal, podría haber una fuerza de fricción. El saco no está deslizándose aún en el piso de la caja, por lo que cualquier fuerza de fricción es estática.

El vehículo acelerará a la derecha, por lo que la fuerza de fricción estática empujará el saco de arena a la derecha para mantenerlo dentro de la camioneta. Trazamos la fuerza de fricción hacia la derecha y elegimos la derecha como el sentido positivo del eje $x$.

$$F_x = ma_x$$
$$+\mathcal{F}_s = ma_x$$



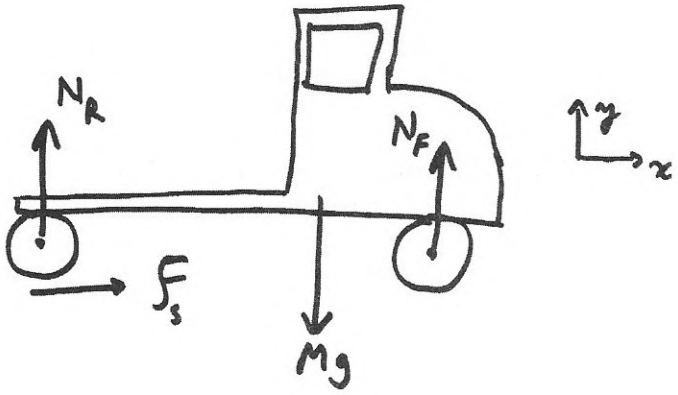

La aceleración máxima ocurre cuando la magnitud de la fuerza de fricción es la más alta posible. La mayor magnitud posible que la fuerza de fricción puede alcanzar es

$$ma_x = \mathcal{F}_s \leq \mu_s N$$

Necesitamos encontrar la fuerza normal $N$, así que sumamos las fuerzas en la dirección $y$ (positiva hacia arriba).

$$F_y = ma_y$$
$$+N - mg = ma_y = m(0) = 0$$
$$N = mg$$
$$ma_x \leq \mu_s mg$$
$$a_x \leq \mu_s g = (0.56)(9.8 \text{ m/s}^2) = 5.5 \text{ m/s}^2$$

El propio vehículo es acelerado por la fricción estática, esta vez entre los neumáticos y el pavimento. Los neumáticos giran, pero mientras no se deslicen sobre el pavimento, la fricción es estática.




*LECCIÓN*

La fricción se opone al deslizamiento entre superficies.

**EJEMPLO**

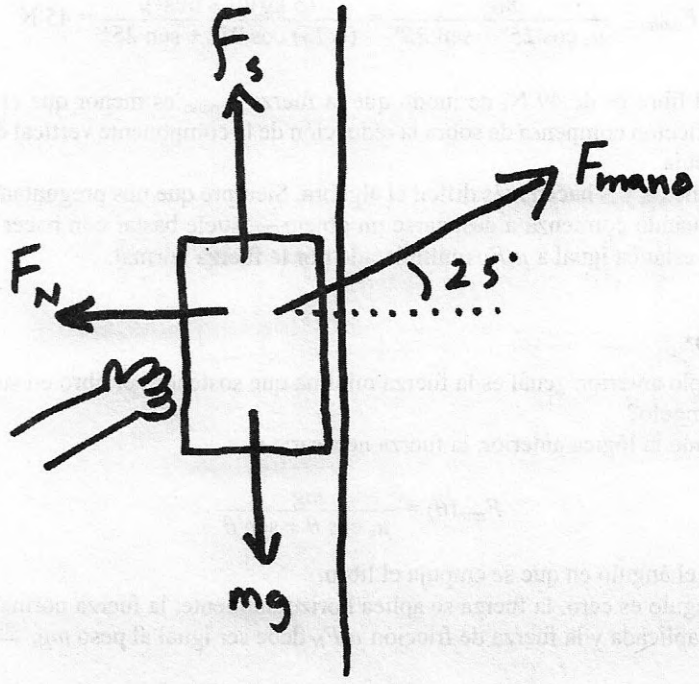
Un libro de 5 kg se sostiene contra una pared vertical con una fuerza dirigida a 25° por encima de la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el libro y la pared es de 0.73. ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para impedir que el libro se deslice hacia abajo por la pared?

Comencemos con el diagrama de cuerpo libre. El libro tiene masa, de manera que la gravedad tira de él hacia abajo. La fuerza aplicada $F_{\text{mano}}$ lo empuja hacia arriba y contra la pared (es la magnitud de esta fuerza la que tratamos de encontrar). Dado que el libro está en contacto con una superficie (la pared), hay una fuerza normal que sale perpendicular de la pared, o sea horizontal. No conocemos la magnitud de esta fuerza, así que la llamamos $F_N$.

Siempre que hay una fuerza normal puede haber una fuerza de fricción. La fuerza de fricción es paralela a la superficie, así que podría empujar el libro hacia arriba o

hacia abajo. La fuerza de fricción será tan grande como sea necesario, hasta el límite $\mu_s F_N$, para que el libro no se deslice. Si presionamos el libro con fuerza, empujando más bien hacia arriba, éste podría deslizarse en sentido ascendente por la pared, así que la fuerza de fricción sería descendente. Queremos mantener el libro inmóvil aplicando sólo un poco de fuerza, así que deseamos que la fricción ayude a sostenerlo. La fricción empuja el libro hacia arriba por la pared, ayudándonos a mantenerlo en su lugar.

Elegimos los ejes de coordenadas: no hay aceleración, por lo que podemos elegir los que queramos. Usaremos el sentido positivo de $x$ a la derecha y el de $y$ hacia arriba.




Ahora sumamos las fuerzas en cada eje, haciendo la suma igual a la masa del libro multiplicada por la aceleración a lo largo de ese eje.

$$F_x = ma_x$$
$$+F_{\text{mano}} \cos 25° - F_N = ma_x = 0$$
$$F_y = ma_y$$
$$+F_{\text{mano}} \operatorname{sen} 25° - mg + \mathcal{F}_s = ma_y = 0$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas ($F_{\text{mano}}$, $F_N$ y $\mathcal{F}_s$). También sabemos que el límite para la fuerza de fricción estática es $\mu_s F_N$, de modo que

$$-F_{\text{mano}} \operatorname{sen} 25° + mg = \mathcal{F}_s \leq \mu_s F_N$$

Encontremos la fuerza normal a partir de la ecuación en $x$.

$$F_N = F_{\text{mano}} \cos 25^\circ$$

$$-F_{\text{mano}} \operatorname{sen} 25^\circ + mg \leq \mu_s F_{\text{mano}} \cos 25^\circ$$

$$mg \leq \mu_s F_{\text{mano}} \cos 25^\circ + F_{\text{mano}} \operatorname{sen} 25^\circ$$

$$mg \leq F_{\text{mano}} (\mu_s \cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ)$$

$$F_{\text{mano}} (\mu_s \cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ) \geq mg$$

$$F_{\text{mano}} \geq \frac{mg}{\mu_s \cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{(5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{(0.73) \cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} = 45 \text{ N}$$

El peso del libro es de 49 N, de modo que la fuerza $F_{\text{mano}}$ es menor que el peso. La fuerza de fricción compensa de sobra la reducción de la componente vertical de la fuerza que empuja.

Los signos $\geq$ y $\leq$ hacen más difícil el álgebra. Siempre que nos preguntamos por el límite —cuándo comienza a deslizarse un objeto— suele bastar con hacer la fuerza de fricción estática igual a $\mu_s F_N$ multiplicado por la fuerza normal.

**EJEMPLO***

En el ejemplo anterior, ¿cuál es la fuerza mínima que sostendrá el libro en su lugar en cualquier ángulo?

Siguiendo la lógica anterior, la fuerza necesaria es

$$F_{\text{min}}(\theta) = \frac{mg}{\mu_s \cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$$

donde $\theta$ es el ángulo en que se empuja el libro.

Si el ángulo es cero, la fuerza se aplica horizontalmente, la fuerza normal es igual a la fuerza aplicada y la fuerza de fricción $\mu_s F_N$ debe ser igual al peso $mg$,

$$mg = \mu_s F_N = \mu_s F \quad \rightarrow \quad F = \frac{mg}{\mu_s}$$

lo cual concuerda con nuestra ecuación. Si el ángulo θ es de 90°, la fuerza se aplica verticalmente y esperamos que $F = mg$, lo que también concuerda con nuestra ecuación. Dado que el coeficiente de fricción suele ser menor que 1, ¿no debe la fuerza ser mínima cuando $\theta$ mide 90°? No necesariamente. En nuestro ejemplo anterior, la fuerza mínima fue menor que el peso. Dado que cos $\theta$ no cambia mucho cuando el ángulo se incrementa desde cero, el incremento en la componente horizontal de la fuerza es mayor que la disminución en la componente vertical de la fuerza cuando $\theta$ se incrementa desde cero. Por un lapso, el aumento en la fuerza de fricción compensa de sobra el decremento en la fuerza vertical aplicada.

* En este ejemplo se utiliza el cálculo diferencial.

La pregunta es: ¿cuándo el incremento en la fuerza de fricción es igual al decremento en la componente vertical de la fuerza aplicada? Esto ocurre cuando el cambio en la fuerza mínima necesaria es cero conforme el ángulo se incrementa, o cuando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} F_{\text{mano}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{mg}{\mu_s \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}\right) = 0$$

$$-\frac{(mg)}{(\mu_s \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\mu_s \cos\theta + \operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$-\mu_s \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\mu_s}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\mu_s}$$

Sustituyendo este ángulo en la ecuación para la fuerza (y utilizando algunas identidades trigonométricas), se obtiene una fuerza mínima de

$$F_{\text{min}} = \frac{mg}{\sqrt{\mu_s^2 + 1}}$$

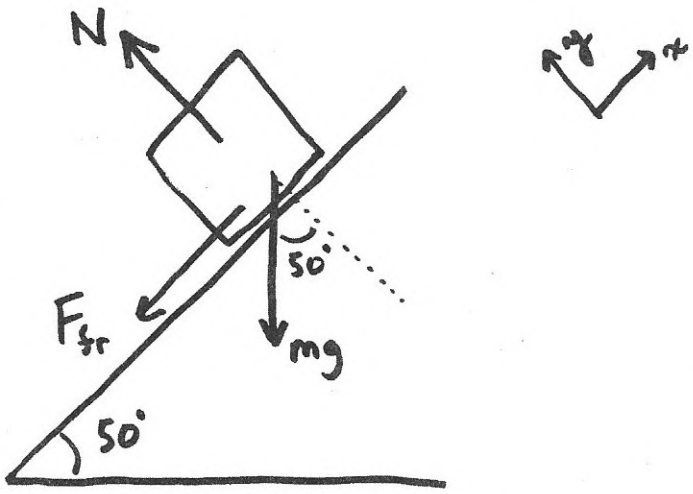
Para nuestro caso de $\mu_s = 0.73$, la fuerza mínima es 81% del peso cuando el ángulo $\theta$ es de 54° arriba de la horizontal.

**EJEMPLO**

Un bloque recibe un impulso para que suba por una rampa a 50° con una rapidez inicial de 8 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre la rampa y el bloque es de 0.46. ¿Cuánto ascenderá el bloque por la rampa antes de detenerse?

Las fuerzas son constantes, de modo que la aceleración debe ser constante. Podemos aplicar la técnica de la aceleración constante si conocemos tres de las cinco variables. Conocemos las velocidades inicial y final ($v_f = 0$) y queremos encontrar el desplazamiento, pero no conocemos el tiempo ni la aceleración. Si pudiéramos determinar esta última sumando las fuerzas, entonces podríamos resolver el problema de aceleración constante.

Para sumar las fuerzas, comenzamos trazando un diagrama de cuerpo libre. El bloque tiene masa, aunque no se nos dice cuál es. Usaremos el símbolo $m$ para la masa; pero tal vez no la necesitemos. El peso es $W = mg$ hacia abajo. El bloque está en contacto con una superficie, de modo que hay una fuerza normal $N$ perpendicular a la superficie. Dado que hay una fuerza normal, podría haber una fuerza de fricción. Puesto que el bloque asciende deslizándose por la rampa, hay una fuerza de fricción cinética $F_{\text{fr}}$ hacia abajo de la rampa.




¿Qué hay de la fuerza que empuja el bloque rampa arriba? Esa fuerza puso en movimiento el bloque, pero ya no está actuando sobre él. Queremos sólo las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando se desliza rampa arriba después de que se le ha imprimido su rapidez inicial de 8 m/s.

Para sumar las fuerzas debemos elegir un par de ejes de coordenadas. El bloque está ascendiendo por la rampa y va deteniéndose, de modo que la aceleración está en dirección rampa abajo. Queremos que un eje sea paralelo a la aceleración, así que $x$ tiene sentido hacia arriba o hacia abajo de la rampa. Si tomamos el sentido descendente de la rampa como $+x$, entonces la aceleración será positiva; mientras que si tomamos como $+x$ el sentido ascendente de la rampa, la velocidad inicial y el desplazamiento serán positivos. Como buscamos el desplazamiento, usaremos el sentido ascendente de la rampa como el eje $+x$.

Sumamos las fuerzas en la dirección $x$,

$$F_x = ma_x$$
$$-mg \text{ sen } 50^\circ - F_{\text{fr}} = ma_x$$
$$-mg \text{ sen } 50^\circ - \mu_k N = ma_x$$

Queremos encontrar $a_x$ a partir de estas ecuaciones, pero no conocemos $m$ ni $N$. Para encontrar $N$ sumamos las fuerzas en la dirección $y$.

$$F_y = ma_y$$
$$+N - mg \cos 50^\circ = ma_y = 0$$

Antes elegimos que el eje $x$ fuera paralelo a la aceleración, de modo que la aceleración $y$ es cero.

$$N = mg \cos 50^\circ$$
$$-mg \text{ sen } 50^\circ - \mu_k (mg \cos 50^\circ) = ma_x$$

La masa se cancela.

$$a_x = -g \text{ sen } 50^\circ - \mu_k g \cos 50^\circ$$
$$a_x = -g \, (\text{sen } 50^\circ + \mu_k \cos 50^\circ)$$
$$a_x = -10.4 \text{ m/s}^2$$

Ahora podemos resolver la parte de aceleración constante.

$$\Delta x = ?$$
$$v_0 = +8 \text{ m/s}$$
$$v = 0$$
$$a = -10.4 \text{ m/s}^2$$
$$t =$$

No nos interesa el tiempo que tarda el bloque en detenerse, así que

$$v^2 - v_o^2 = 2a \, \Delta x$$
$$\Delta x = \frac{v^2 - v_o^2}{2a}$$
$$\Delta x = \frac{(0)^2 - (+8 \text{ m/s})^2}{2(-10.4 \text{ m/s}^2)}$$
$$\Delta x = 3.08 \text{ m}$$

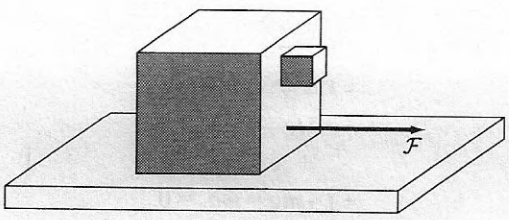
Si entonces el bloque comenzara a descender por la rampa, la fuerza de fricción apuntaría rampa arriba. La aceleración no será la misma que cuando el bloque ascendió. Necesitaríamos trazar un nuevo diagrama de cuerpo libre y volver a sumar las fuerzas.

*LECCIÓN*

Las fuerzas de fricción siempre son paralelas a las superficies.

**EJEMPLO**

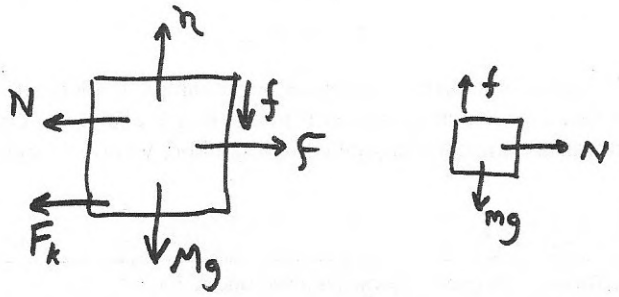
Una caja pequeña ($m = 2.0$ kg) está en contacto con una caja grande ($m = 18$ kg) como se ilustra. Una fuerza $\mathcal{F}$ empuja la caja más grande. Debido a la fricción, si la fuerza $\mathcal{F}$ es lo suficientemente grande, la caja pequeña no se caerá. ¿Cuán grande necesita ser $\mathcal{F}$? Los coeficientes de fricción de todas las superficies son $\mu_s = 0.62$ y $\mu_k = 0.42$.



Como siempre, comenzamos con los diagramas de cuerpo libre. Necesitamos un diagrama separado para cada caja (veremos por qué en un momento). Para la caja pequeña tenemos el peso $mg$ hacia abajo. Está en contacto con la caja grande, de modo que podría haber una fuerza normal $N$ hacia la derecha. De haber una fuerza normal, también podría haber una fuerza de fricción. Si no hubiera fricción, entonces la caja pequeña se deslizaría por el costado de la grande. Para impedir esto hay una fuerza de fricción estática $f$ que empuja la caja pequeña hacia arriba.

La caja grande tiene masa, por lo que la gravedad actúa sobre ella. Las masas de las cajas son distintas, así que llamamos $Mg$ a la fuerza gravitacional que actúa sobre la caja grande. Una mano invisible empuja esta caja hacia la derecha con una fuerza $\mathcal{F}$. La caja está en contacto con el piso, de modo que podría haber una fuerza normal. Como ya hemos usado el símbolo $N$ para la fuerza entre las cajas, y esta otra fuerza no necesariamente es igual a aquélla, llamaremos $\eta$ a la fuerza normal del piso contra la caja grande. Dado que hay una fuerza normal, podría haber una fuerza de fricción $F_k$, que empujaría la caja grande hacia la izquierda a medida que ésta se deslizara a la derecha.

La caja grande también está en contacto con la pequeña. Si la grande empuja a la pequeña hacia la derecha con una fuerza normal $N$, entonces la pequeña empuja a la grande hacia la izquierda con una fuerza normal $N$. Si la grande empuja a la pequeña hacia arriba con una fuerza de fricción $f$, entonces la pequeña empuja a la grande hacia abajo con una fuerza de fricción $f$. Ésta es la tercera ley de Newton.




De haber usado un solo diagrama de cuerpo libre para los dos objetos combinados, las fuerzas que éstos se aplican mutuamente ($N$ y $f$) se cancelarían. No aparecerían en nuestras ecuaciones, pero las necesitamos porque es la fuerza de fricción la que mantiene en su sitio a la caja pequeña.

Dado que la aceleración es horizontal, tomamos como nuestros ejes la horizontal y la vertical. Usamos la segunda ley de Newton, sumando las fuerzas que actúan sobre cada caja en cada dirección e igualando con la masa multiplicada por la aceleración en esa dirección.

$$
\begin{aligned}
F &= ma \\
+\mathcal{F} - N - F_k &= Ma_x \\
+\eta - Mg - f &= Ma_y = 0 \\
+N &= ma_x \\
+f - mg &= ma_y = 0
\end{aligned}
$$

Utilizamos la misma aceleración $a_x$ para ambas cajas porque éstas se mueven juntas. La aceleración vertical $a_y$ es de cero porque elegimos el eje $x$ paralelo a la aceleración.

Dado que deseamos el valor límite de $\mathcal{F}$, deseamos el valor límite de la fuerza de fricción estática, así que $f = \mu_s N$, donde $N$ es la fuerza normal entre las dos cajas. La fricción cinética entre la caja grande y el piso es $\mu_k \eta$, donde $\eta$ es la fuerza normal entre la caja grande y el piso.

$$\begin{cases} +\mathcal{F} - N - \mu_k \eta = Ma_x \\ +\eta - Mg - \mu_s N = 0 \\ +N = ma_x \\ +\mu_s N - mg = 0 \end{cases}$$

La situación puede parecer complicada, pero no es tan mala. En la cuarta ecuación vemos que la fricción estática $f$ es igual al peso de la caja pequeña, de modo que podemos encontrar $N$. A partir de la tercera ecuación encontramos la aceleración. Con la segunda encontramos la fuerza normal entre la caja grande y el piso. Sustituimos todo en la primera ecuación y despejamos $\mathcal{F}$.

$$N = \frac{mg}{\mu_s}$$

$$a_x = \frac{N}{m} = \frac{mg}{\mu_s}\frac{1}{m} = \frac{g}{\mu_s}$$

$$\eta = Mg + \mu_s N = Mg + mg = (M+m)g$$

$$\mathcal{F} = N + \mu_k \eta + Ma_x$$

$$\mathcal{F} = \frac{mg}{\mu_s} + \mu_k (M+m)g + M\frac{g}{\mu_s}$$

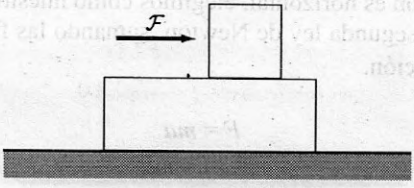
$$\mathcal{F} = (M+m)\left(\frac{1}{\mu_s} + \mu_k\right)g$$

$$\mathcal{F} = (18\text{ kg} + 2.0\text{ kg})\left(\frac{1}{0.62} + 0.42\right)(9.8\text{ m/s}^2)$$

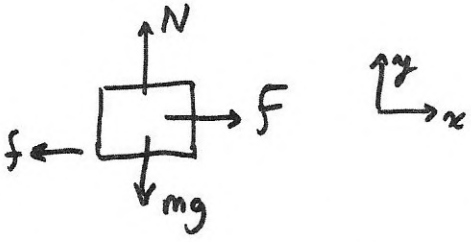
$$\mathcal{F} = 398\text{ N}$$

**EJEMPLO**

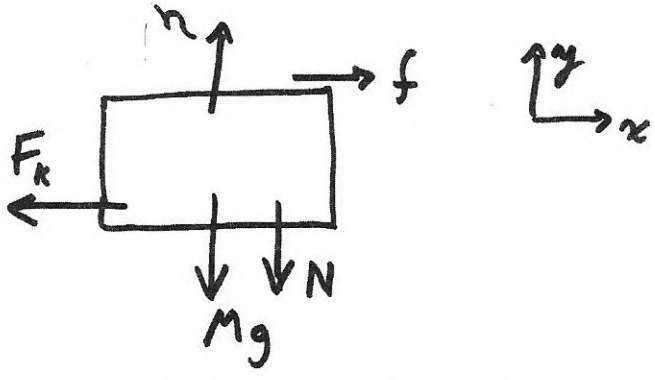
Una caja pequeña ($m$ = 2.0 kg) reposa sobre una grande ($m$ = 18 kg), como se muestra. Una fuerza $\mathcal{F}$ empuja la primera. ¿Cuál es la fuerza máxima $\mathcal{F}$ para que la caja pequeña no resbale sobre la grande? Los coeficientes de fricción de todas las superficies son $\mu_s = 0.62$ y $\mu_k = 0.42$.



Comenzamos trazando los diagramas de cuerpo libre. Utilizamos un diagrama para cada caja. Para la pequeña tenemos el peso $mg$ hacia abajo y la fuerza aplicada $\mathcal{F}$, hacia la derecha. Está en contacto con la caja grande, de modo que podría haber una fuerza normal $N$ hacia arriba. Dado que hay una fuerza normal, podría haber una fuerza de fricción. Si no hubiera fricción, entonces no existiría la posibilidad de que la caja grande se moviera horizontalmente; sobre ella no actúan fuerzas horizontales excepto la fricción. La caja pequeña se deslizaría hasta caer de la grande. Esto es impedido por una fuerza de fricción estática $f$ que empuja la caja grande hacia la derecha y una fuerza igual y opuesta $f$ que empuja la caja pequeña hacia la izquierda.




La caja grande tiene masa, de modo que la gravedad tira de ella hacia abajo con una fuerza $Mg$. Está en contacto con el piso, de modo que podría haber una fuerza normal. Dado que ya hemos usado el símbolo $N$, y que esta fuerza no necesariamente es igual a aquélla, llamaremos $\eta$ a la fuerza normal del piso que actúa sobre la caja grande. Como la caja grande empuja hacia arriba a la pequeña con una fuerza $N$, la pequeña empuja hacia abajo a la grande con una fuerza $N$. Como vimos en el párrafo anterior, hay una fuerza de fricción estática $f$ que empuja la caja grande hacia la derecha, pero también hay una fuerza de fricción cinética $F_k$ que empuja la caja grande hacia la izquierda.




Puesto que la aceleración es horizontal, elegimos como nuestros ejes la horizontal y la vertical. Utilizamos la segunda ley de Newton, sumando las fuerzas que actúan sobre cada caja en cada dirección.

$$F = ma$$
$$+\mathcal{F} - f = ma_x$$

$$-mg + N = ma_y = 0$$
$$-F_k + f = Ma_x$$
$$+\eta - N - Mg = Ma_y = 0$$

Empleamos la misma aceleración horizontal $a_x$ para ambas cajas porque se mueven juntas. La aceleración vertical $a_y$ es cero porque elegimos el eje $x$ paralelo a la aceleración.

Dado que deseamos el valor límite de $\mathcal{F}$, queremos el valor límite de la fuerza de fricción estática, así que $f = \mu_s N$, donde $N$ es la fuerza normal entre las dos cajas. La fricción cinética entre la caja grande y el piso es $\mu_k \eta$, donde $\eta$ es la fuerza normal entre la caja grande y el piso.

$$\begin{cases} +\mathcal{F} - \mu_s N = ma_x \\ -mg + N = ma_y = 0 \\ -\mu_k \eta + \mu_s N = Ma_x \\ +\eta - N - Mg = Ma_y = 0 \end{cases}$$

En la segunda ecuación vemos que la fuerza normal $N$ entre las cajas es igual al peso de la caja pequeña $mg$ (se trata del caso especial: dos fuerzas verticales y ninguna aceleración vertical). A partir de la cuarta ecuación encontramos la fuerza normal $\eta$ entre la caja grande y el piso. Por la tercera ecuación determinamos la aceleración. Sustituimos todo en la primera ecuación y despejamos $\mathcal{F}$.

$$N = mg$$
$$\eta = N + Mg = (m + M)g$$
$$-\mu_k(m + M)g + \mu_k mg = Ma_x$$
$$a_x = \frac{\mu_s mg}{M} - \frac{\mu_k(m + M)g}{M}$$
$$\mathcal{F} = \mu_s mg + ma_x$$
$$\mathcal{F} = \mu_s mg + \frac{\mu_s m^2 g}{M} - \frac{\mu_k(m + M)mg}{M}$$
$$\mathcal{F} = \left(\frac{\mu_s mM + \mu_s m^2 - \mu_k(m + M)m}{M}\right)g$$
$$\mathcal{F} = \left(\frac{(0.62)(2\text{ kg})(18\text{ kg}) + (0.62)(2\text{ kg})^2 - (0.42)(20\text{ kg})(2\text{ kg})}{(18\text{ kg})}\right)g$$
$$\mathcal{F} = 4.4\text{ N},$$

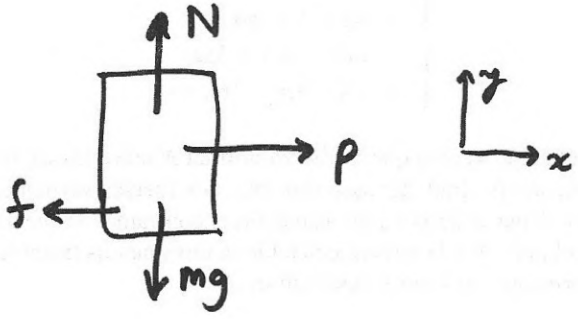
*LECCIÓN*

Si nos interesan las fuerzas que dos objetos se aplican mutuamente, entonces necesitamos dos diagramas de cuerpo libre.

**EJEMPLO**

Un refrigerador con peso de 500 N está en el piso. El coeficiente de fricción cinética entre el refrigerador y el piso es de 0.30, y el coeficiente de fricción estática es de 0.40. Se aplica una fuerza de 170 N horizontalmente al refrigerador. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre el refrigerador?

El refrigerador tiene masa, de modo que tiene un peso dirigido hacia abajo. Está en contacto con el piso, así que hay una fuerza normal hacia arriba. Dado que hay una fuerza normal, podría haber una fuerza de fricción $f$, la cual podría estar dirigida hacia la izquierda o hacia la derecha. El refrigerador es empujado lateralmente con una fuerza $P$, que trazaremos hacia la derecha. La fricción debe empujar hacia la izquierda para impedir que el refrigerador se deslice.




Elegimos el eje $x$ con sentido positivo hacia la derecha y sumamos las fuerzas.

$$F_x = ma_x$$
$$P - f = ma_x$$

Si $P$ es mayor que la fuerza de fricción, entonces el refrigerador se acelerará hacia la derecha, deslizándose sobre el piso. En tal caso la fricción será cinética e igual a $\mu_k N$. Si la fuerza de fricción fuera mayor que $P$, entonces el refrigerador aceleraría hacia la izquierda: alguien lo empuja hacia la derecha ¡y el refrigerador se regresa contra él debido a la imbatible fricción! En realidad esto no ocurre. La fricción no tendrá mayor magnitud que la fuerza de empuje sobre el refrigerador. Si la fricción estática es lo suficientemente intensa para impedir que el refrigerador se deslice, entonces será apenas suficiente para eso, y no más.

La fuerza de fricción estática máxima es

$$f_{\text{máx}} = \mu_s N$$

Sumamos todas las fuerzas verticales.

$$+N - mg = ma_y = 0$$
$$N = mg$$
$$f_{\text{máx}} = (0.40)(500\ \text{N}) = 200\ \text{N}$$

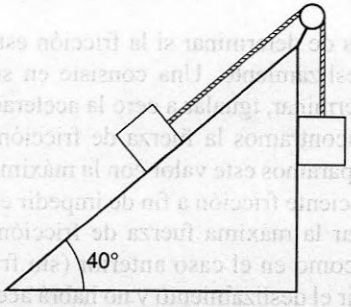
La fricción puede contrarrestar un empuje hasta de 200 N, de modo que ejerce una fuerza más que suficiente para impedir que el refrigerador se deslice en este ejemplo. No ejercerá un empuje "más que suficiente", sino sólo el suficiente.

$$P - f = ma_y = 0$$
$$f = P = 170 \text{ N}$$

La fricción ejerce un empuje de reacción de la magnitud suficiente para que la fuerza total sea cero y el refrigerador no se mueva.

**EJEMPLO**

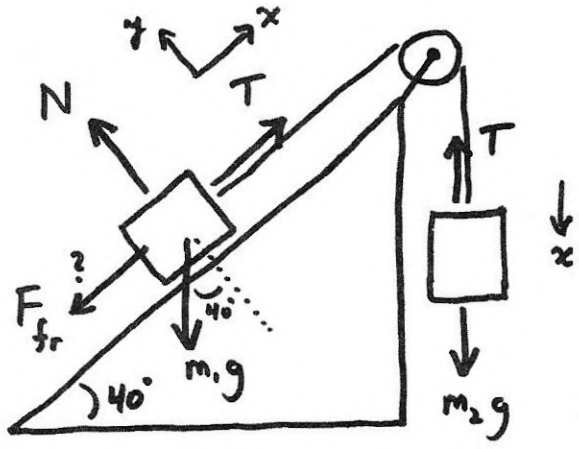
Una caja de 6 kg está en una rampa de 40°. Está unida a otra caja de 4 kg por una cuerda sin masa y sin fricción. Los coeficientes de fricción entre la caja de 6 kg y la rampa son de $\mu_s = 0.44$ y $\mu_k = 0.33$. ¿Cuál es la aceleración de cada caja?




Resolvimos este problema en el capítulo anterior, salvo que en esa oportunidad no había fricción. Encontramos que la caja de 6 kg se acelera hacia arriba y la de 4 kg lo hace hacia abajo. Repitamos el proceso considerando la fricción.

El diagrama de cuerpo libre es básicamente el mismo. Cada caja tiene una fuerza gravitacional ($m_1g$ y $m_2g$) y una fuerza de tensión $T$. La caja de la izquierda está en contacto con la rampa, de modo que incluimos la fuerza normal desconocida $N$.

También podría haber una fuerza de fricción. Ésta actuará en un sentido tal que impida (o frene) el deslizamiento de la caja de 6 kg sobre la rampa. Si esta caja tiende a descender deslizándose por la rampa, la fuerza de fricción actuará hacia arriba de la rampa. Si trata de deslizarse ascendiendo, la fuerza de fricción actuará hacia abajo de la rampa. Si no hubiéramos resuelto antes el problema sin fricción, tendríamos que hacerlo ahora para saber en qué sentido colocar la fuerza de fricción. Éste es el motivo por el cual es mejor dejar para el final la fricción cuando se trazan diagramas de cuerpo libre. Por fortuna ya sabemos que, sin fricción, la caja se deslizará ascendiendo por la rampa, así que nuestra fuerza de fricción tiene el sentido descendente sobre ésta.




Ahora que conocemos el sentido de la fuerza de fricción, ¿se trata de fricción estática o de fricción cinética? ¿Es la fuerza de fricción estática suficiente para impedir que la caja se deslice? Si lo es, entonces la aceleración es cero. Si no lo es, entonces habrá una fuerza de fricción cinética y deberemos sumar las fuerzas y usar la segunda ley de Newton.

Hay un par de maneras de determinar si la fricción estática es lo suficientemente grande para impedir el deslizamiento. Una consiste en sumar la fuerza de fricción como una variable por determinar, igualar a cero la aceleración y despejar la fuerza de fricción. De este modo encontramos la fuerza de fricción necesaria para impedir el deslizamiento. Luego comparamos este valor con la máxima fuerza de fricción estática posible para ver si hay suficiente fricción a fin de impedir el deslizamiento. De manera alternativa, podemos sumar la máxima fuerza de fricción posible. Si la aceleración tiene el sentido opuesto, como en el caso anterior (sin fricción), entonces hay fricción suficiente para impedir el deslizamiento y no habrá aceleración. Si no hay fricción suficiente para impedir el deslizamiento, entonces deberemos sustituir la fricción estática por la fricción cinética y determinar la aceleración. Por supuesto, podríamos terminar realizando el cálculo tres veces, pero cada iteración será similar a la previa. En particular, podemos hacer el cálculo una vez y permutar los coeficientes de fricción.

Tomaremos el ascenso por la rampa como el sentido positivo de $x$ para $m_1$ y el descenso como el sentido positivo de $x$ para $m_2$, dado que esos son los sentidos en que cada una se acelera en el caso sin fricción. Comencemos por sumar las fuerzas que actúan sobre $m_1$ en la dirección $x$.

$$F = ma$$
$$-m_1 g \operatorname{sen} 40^\circ + \mathrm{T} - \mu N = m_1 a_x$$
$$+N - m_1 g \cos 40^\circ = m_1 a_y = 0$$
$$+m_2 g - T = m_2 a_x$$

Eliminamos $T$ sumando la primera y la tercera ecuaciones.

$$m_2 g - m_1 g \operatorname{sen} 40^\circ - \mu N = (m_1 + m_2) a_x$$

Resolvemos la segunda ecuación (para $y$) a fin de encontrar la fuerza normal

$$N = m_1 g \cos 40^\circ$$
$$(m_1 + m_2)a_x = m_2 g - m_1 g \operatorname{sen} 40^\circ - \mu m_1 g \cos 40^\circ$$
$$(m_1 + m_2)a_x = g(m_2 - m_1 \operatorname{sen} 40^\circ - \mu m_1 \cos 40^\circ)$$

La primera pregunta es hacia dónde se aceleran las cajas (ya lo sabemos porque resolvimos el problema antes, pero de no haberlo hecho, esto sería lo primero que deberíamos determinar). Igualamos a cero el coeficiente de fricción $\mu$ y vemos si la aceleración es positiva o negativa.

$$(6 \text{ kg} + 4 \text{ kg})a_x = (9.8 \text{ m/s}^2)\,[(4 \text{ kg}) - (6 \text{ kg}) \operatorname{sen} 40^\circ - (0)(6 \text{ kg}) \cos 40^\circ]$$
$$a_x = +0.14 \text{ m/s}^2$$

En ausencia de fricción, la aceleración ocurre en el sentido positivo o hacia arriba de la rampa. (En el capítulo anterior fue negativa, pero en aquel caso el sentido positivo era el descenso por la rampa, de modo que la aceleración actuaba hacia arriba de ésta.) Si hubiéramos elegido el sentido equivocado, entonces habríamos invertido la fuerza de fricción y cambiado su signo en la ecuación.

¿Hay fricción estática suficiente para impedir el deslizamiento? Se sustituye $\mu$ por $\mu_s$ y se repite el cálculo.

$$(6 \text{ kg} + 4 \text{ kg})a_x = (9.8 \text{ m/s}^2)\,[(4 \text{ kg}) - (6 \text{ kg}) \operatorname{sen} 40^\circ - (0.44)(6 \text{ kg}) \cos 40^\circ]$$
$$a_x = -18.4 \text{ m/s}^2$$

Si la magnitud de la fuerza de fricción estática fuera la máxima posible, la aceleración tendría el sentido descendente de la rampa. Hay fricción de sobra disponible para impedir que las cajas se aceleren, de modo que la aceleración es cero.

Si no hubiera fricción suficiente, el último resultado habría tenido el mismo signo que el primero (el mismo sentido). Entonces habríamos tenido que calcular la aceleración. La fricción habría sido cinética y habríamos sustituido el coeficiente de fricción $\mu$ por $\mu_k$ y realizado el álgebra nuevamente.

*LECCIÓN*

Si nos interesa el caso límite —el momento preciso en que las superficies comienzan a deslizarse—, suele ser conveniente sustituir la fuerza de fricción estática por la fuerza de fricción estática máxima. Si no se trata del caso límite, entonces debemos ser más cuidadosos. Podríamos no conocer siquiera el sentido de la fuerza de fricción.

## 4.2 TRAYECTORIAS CIRCULARES

Cuando algo se mueve en círculo, su velocidad cambia aunque la rapidez permanezca constante. Dado que la velocidad se compone tanto de rapidez como de dirección y

sentido, un objeto puede viajar con rapidez constante mientras la velocidad cambia si la dirección cambia. En particular, la aceleración de cualquier objeto que se mueva en círculo es

$$a = \frac{v^2}{R}$$

donde $v$ es la rapidez y $R$ es el radio del círculo.

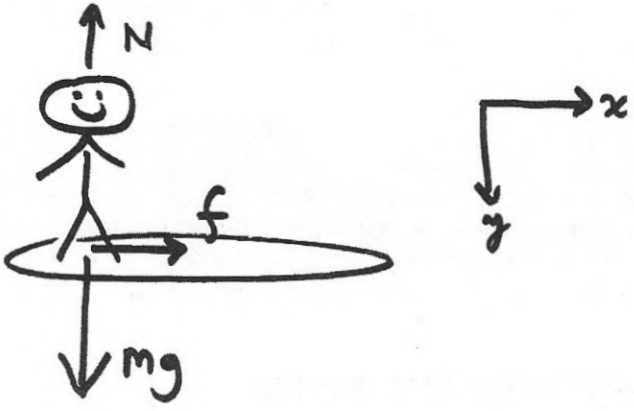
Si ésta es la aceleración, llamada aceleración centrípeta, entonces la fuerza total debe ser $F = ma = mv^2/R$. Algunas veces esto se llama fuerza centrípeta. En realidad no es una fuerza; no existe, y nunca aparece en un diagrama de cuerpo libre. "Fuerza centrípeta" es el nombre que le damos a la fuerza total, la suma de todas las fuerzas, cuando algo se mueve en círculo.

**EJEMPLO**

Una niña está de pie a 1.2 m del centro de un volantín. La niña resbalará y caerá del volantín si éste completa una vuelta en menos de 2.9 s. ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre la niña y el volantín?

Comencemos con el diagrama de cuerpo libre. La niña tiene masa, de modo que hay una fuerza de gravedad $mg$, aunque no conocemos esa masa. Está en contacto con una superficie, el piso del volantín, así que hay una fuerza normal $N$ que apunta hacia arriba. Dado que hay una fuerza normal, podría haber una fuerza de fricción. La niña no se desliza en el piso, por lo que la fricción será estática. No está en contacto con nada más, de modo que no actúan otras fuerzas.

¿Cuál es el sentido de la fuerza de fricción? La fricción estática tendrá la magnitud y el sentido que deba tener a fin de impedir que la niña se deslice sobre el piso. Si no hubiera fricción, la niña permanecería en el mismo sitio, pues no hay otras fuerzas horizontales. Si no se desliza sobre el volantín, entonces se mueve en círculo, así que su aceleración está dirigida hacia el centro de éste. La fuerza de fricción $f$ debe estar en este sentido.



Elegimos el eje $x$ paralelo a la aceleración, hacia el centro del volantín. Cuando el juego gire, también lo hará este eje, pero eso no cambia nuestros razonamientos. Necesitamos un segundo eje perpendicular al primero, digamos el eje $y$ positivo hacia abajo (sólo para variar). Utilizamos la segunda ley de Newton y sumamos las fuerzas en la dirección $x$.

$$F_x = ma_x$$

$$+f = m\frac{v^2}{R}$$

Dado que trabajamos en el límite, es decir, la rapidez máxima a la cual no resbalará la niña, podemos hacer la fuerza de fricción estática igual al coeficiente de fricción multiplicado por la fuerza normal.

$$\mu_s N = m\frac{v^2}{R}$$

Podemos calcular $v$ como la distancia $d$ sobre el tiempo $t$.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{2\pi R}{t}$$

$$\mu_s N = m\left(\frac{2\pi R}{t}\right)^2 \frac{1}{R}$$

Para encontrar la fuerza normal sumamos las fuerzas en la dirección $y$.

$$+mg - N = ma_y = 0$$

$$N = mg$$

$$\mu_s mg = \frac{4\pi^2 mR}{t^2}$$

La masa se cancela. Si la masa de la niña se duplica, su peso se duplica, la fuerza normal se duplica y la fuerza de fricción estática máxima se duplica, pero hay el doble de masa que mover, así que la aceleración es la misma.

$$\mu_s = \frac{4\pi^2 R}{gt^2}$$

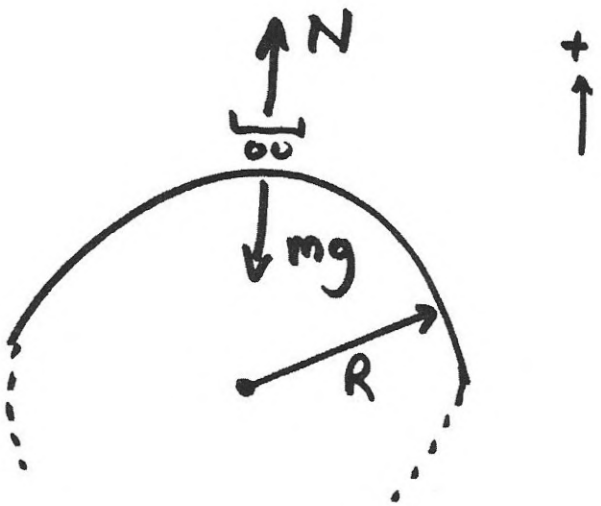
$$\mu_s = \frac{4\pi^2\,(1.2\text{ m})}{(9.8\text{ m/s}^2)(2.9\text{ s})^2}$$

$$\mu_s = 0.57$$

**EJEMPLO**

El carro de una montaña rusa pasa por una cresta a 15 m/s. ¿Cuál debe ser el radio de curvatura de esa cresta para que los pasajeros alcancen el "estado sin peso" al pasar por la cima?

Comencemos con el diagrama de cuerpo libre. (¿Se está haciendo repetitivo este paso inicial? No caigamos en la pereza de omitir este importante paso.) Un pasajero tiene masa $m$, de modo que hay una fuerza gravitacional $mg$ hacia abajo. Está en contacto con el asiento del carro, el cual lo empuja hacia arriba con una fuerza normal $N$. Podría haber una fuerza de fricción horizontal, pero dado que no hay otras fuerzas horizontales ni aceleración horizontal, no se necesita una fuerza de fricción.




Todas las fuerzas son verticales, así que sólo necesitamos un eje. Elegiremos el eje $y$ ascendente como el sentido positivo.

$$F = ma$$
$$+N - mg = ma$$

Cuando el carro pasa por la cresta, el pasajero describe un círculo, o al menos parte de un círculo. Por lo tanto, la aceleración del pasajero es $v^2/R$ hacia el centro del círculo, o sea hacia abajo.

$$+N - mg = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)$$
$$N = mg - m\left(\frac{v^2}{R}\right)$$
$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

El término "estado sin peso" es inapropiado; mientras el pasajero esté en las cercanías de la superficie terrestre tendrá peso. Podríamos usar mejor el de "estado sin fuerza normal", pues de lo que se habla es de la ausencia de contacto con toda superficie. La gravedad actúa sobre los astronautas en órbita, pero los acelera en la misma magnitud en que lo hace con la nave espacial que los rodea, así que ni el piso ni las paredes em-

pujan a los astronautas. La pregunta es cómo construir la cresta de modo que el asiento no impulse hacia arriba a los pasajeros.

Pero, ¿no caerá el pasajero? Por supuesto, la aceleración del pasajero será descendente, pero al pasar por la cima de la cresta, pasajero y carro describen un círculo con aceleración descendente. Aunque su rapidez permanezca constante, su velocidad cambia porque la dirección cambia: la persona subía la cresta y un momento después baja por ella. Si no hay fuerza normal, entonces la única causa de que el pasajero se acelere es la gravedad.

$$g - \frac{v^2}{R} = 0$$

$$R = \frac{v^2}{g} = \frac{(15\ \text{m/s})^2}{(9.8\ \text{m/s}^2)} = 23\ m$$

¿Y si usamos un radio menor, para que $N$ sea negativa? La fuerza necesaria para hacer que el pasajero describa un círculo al ascender la cresta es mayor que la gravedad, así que se requiere fuerza adicional. En algunas partes del recorrido la barra metálica mantiene a los pasajeros sujetos al carro al subir las crestas debido a la gran rapidez con que avanza el carro.

Podríamos proceder del mismo modo en el caso de un bucle en la montaña rusa. En la parte más alta del bucle la fuerza normal actúa hacia abajo, lo mismo que la gravedad. ¿Caería el carro? Sí; para que no caiga necesita una aceleración equivalente a la gravitacional o mayor para permanecer en el bucle.

*LECCIÓN*

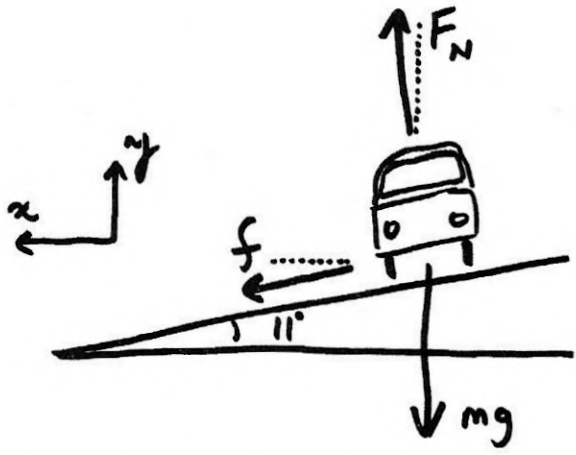
Cualquier objeto que se mueva en círculo tiene una aceleración $a = v^2/R$. Todo lo demás es igual: trace el diagrama de cuerpo libre y haga la fuerza total igual a la masa por la aceleración.

**EJEMPLO**

Un automóvil de 1500 kg toma una curva con radio de 200 m. La curva tiene un peralte de 11° y el coeficiente de fricción estática entre el automóvil y el pavimento es de 0.48. ¿Cuál es la rapidez máxima del automóvil en la curva?

Comencemos trazando el diagrama de cuerpo libre, sin el cual toda esperanza está perdida. El automóvil tiene masa, de modo que hay una fuerza gravitacional $mg$ que tira de él hacia abajo. Hay también una fuerza normal $F_N$ perpendicular a la superficie del camino. Dado que hay una fuerza normal, podría haber también una fuerza de fricción.

Si el automóvil viaja exactamente con la rapidez correcta, el peralte de la curva lo hace describir un círculo. Esto se debe a que parte de la fuerza normal es lateral. Cuanto más rápido viaja el automóvil, tanto mayor es la fuerza hacia adentro que se necesita ejercer sobre el automóvil para mantenerlo moviéndose en un círculo. La fuerza adicional proviene de la fricción, que apunta hacia abajo y hacia adentro a lo largo del camino. La fricción es estática porque los neumáticos no se deslizan sobre el pavimento.




La aceleración es horizontal y hacia adentro, de modo que elegimos el eje $x$ en este sentido. Sumemos las fuerzas en la dirección $x$.

$$F_x = ma_x$$

$$+F_N \operatorname{sen} 11° + f \cos 11° = ma_x = m\frac{v^2}{R}$$

Dado que deseamos la rapidez máxima, lo que representa el caso límite, la fuerza de fricción estática estará en su límite superior y podemos sustituir $f$ por $\mu F_N$.

$$+F_N \operatorname{sen} 11° + \mu F_N \cos 11° = m\frac{v^2}{R}$$

Deseamos encontrar la rapidez $v$ mediante esta ecuación, pero no conocemos la fuerza normal $F_N$. Por ello sumamos las fuerzas en la dirección $y$.

$$F_y = ma_y$$

$$+F_N \cos 11° - f \operatorname{sen} 11° - mg = ma_y = 0$$

$$+F_N \cos 11° - \mu F_N \operatorname{sen} 11° = mg$$

$$F_N = \frac{mg}{(\cos 11° - \mu \operatorname{sen} 11°)}$$

$$\left(\frac{mg}{(\cos 11° - \mu \operatorname{sen} 11°)}\right)(\operatorname{sen} 11° + \mu \cos 11°) = m\frac{v^2}{R}$$

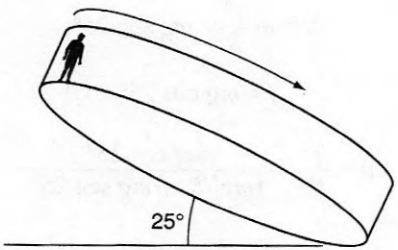
$$v = \sqrt{Rg\frac{(\operatorname{sen} 11° + \mu \cos 11°)}{(\cos 11° - \mu \operatorname{sen} 11°)}}$$

$$v = \sqrt{(200 \text{ m})(9.8 \text{ m/s}^2)\frac{[\operatorname{sen} 11° + (0.48)\cos 11°]}{[\cos 11° - (0.48)\operatorname{sen} 11°]}}$$

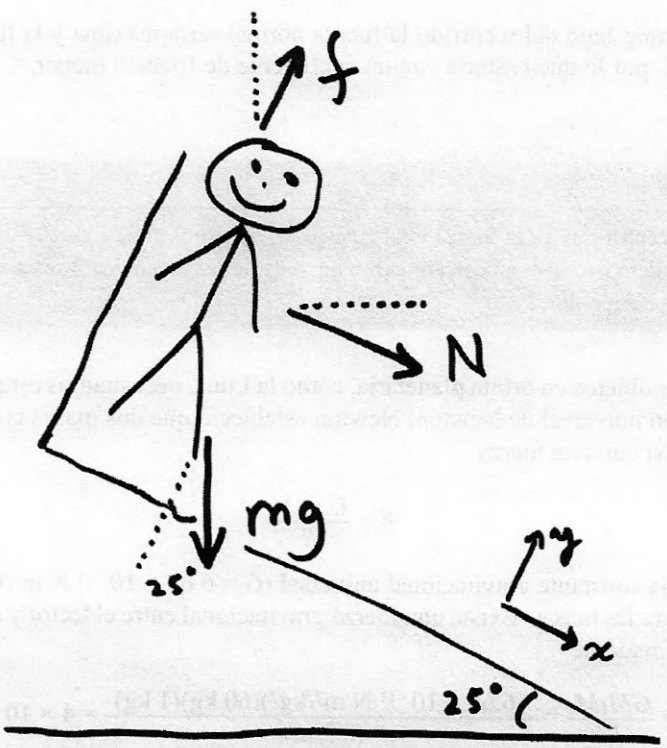
$$v = 38.2 \text{ m/s} = 85 \text{ mph}$$

**EJEMPLO**

En un parque de diversiones, un juego consta de un amplio cilindro (radio = 3.8 m). Las personas se paran en su interior con la espalda contra la pared. El cilindro gira (rapidez de la pared = 11 m/s) y luego el piso se levanta; la fricción mantiene a las personas dentro del cilindro. Para aumentar la emoción, el juego puede inclinarse 25°. ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que mantendrá a las personas en su lugar en el punto más elevado del movimiento?




El peso $W$ de la persona tira de ella hacia abajo. La fuerza normal $N$ apunta perpendicularmente fuera de la pared, o bien hacia abajo y hacia adentro. La fricción $f$ apunta principalmente hacia arriba pero paralela a la pared.



La aceleración está dirigida hacia el centro del cilindro y es paralela a la fuerza normal. Tomamos esta dirección como el eje $x$ y elegimos el eje $y$ paralelo a la fuerza de fricción.

$$F = ma$$

$$+N + mg \operatorname{sen} 25^\circ = ma_x = m\frac{v^2}{R}$$

$$+f - mg \cos 25^\circ = ma_y = 0$$

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg \operatorname{sen} 25^\circ$$

$$f = mg \cos 25^\circ$$

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{mg \cos 25^\circ}{(mv^2/R) - mg \operatorname{sen} 25^\circ}$$

$$\mu = \frac{\cos 25^\circ}{(v^2/Rg) - \operatorname{sen} 25^\circ)}$$

$$\mu = \frac{\cos 25^\circ}{(11 \text{ m/s})^2/(3.8 \text{ m})(9.8 \text{ m/s}^2) - \operatorname{sen} 25^\circ}$$

$$\mu = 0.32$$

En el punto más bajo del recorrido la fuerza normal sería máxima y la fuerza de fricción mínima, por lo que bastaría con un coeficiente de fricción menor.

## *LECCIÓN*

La "fuerza centrípeta" es la fuerza total cuando un objeto se mueve en círculo. No es una fuerza verdadera y a veces no corresponde a ninguna fuerza específica. Nunca aparece en un diagrama de cuerpo libre.

Para estudiar objetos en órbita planetaria, como la Luna, necesitamos estudiar la ley de la gravitación universal de Newton. Newton estableció que dos masas cualesquiera se atraen entre sí con una fuerza

$$F = \frac{GM_1M_2}{R^2}$$

donde $G$ es la constante gravitacional universal ($G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m$^2$/kg$^2$) y $R$ es la distancia entre las masas. Existe una fuerza gravitacional entre el lector y este libro con valor aproximado de

$$F = \frac{GM_1M_2}{R^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2)(60 \text{ kg})(1 \text{ kg})}{(0.3 \text{ m})^2} = 4 \times 10^{-8} \text{ N}$$

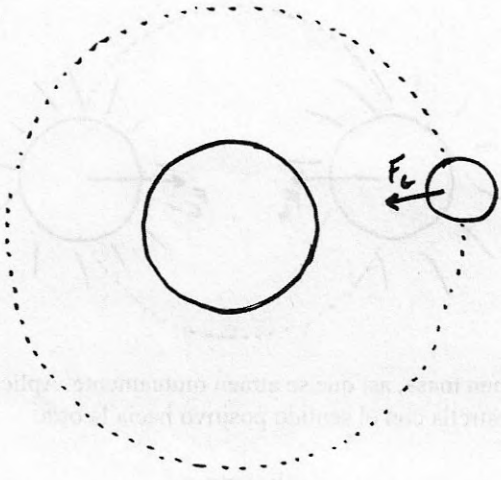
Usted atrae el libro con una fuerza de esta magnitud y el libro lo atrae a usted con la misma fuerza. Dado que esta fuerza es mucho menor que otras que actúan sobre usted y sobre el libro, no nos molestamos en incluirla en nuestros diagramas de cuerpo libre.

Dado que la fuerza depende de la distancia, ¿cambia la aceleración de la gravedad cuando subimos o bajamos respecto a la superficie terrestre? Sí. Cuando ascendemos 3 m, la fuerza de gravedad se debilita en aproximadamente un millonésimo (0.0001% más débil). A la altitud a la que vuelan los aviones, la gravedad es un 0.3% más débil que en la superficie del planeta. En virtud de que es pequeño, solemos despreciar este efecto.

**EJEMPLO**

La Luna describe una trayectoria circular alrededor de la Tierra con radio de $3.85 \times 10^8$ m. La masa terrestre es de $5.98 \times 10^{24}$ kg y la masa lunar es de $7.35 \times 10^{22}$ kg. ¿Cuánto tarda la Luna en completar una revolución alrededor de la Tierra?

La Luna tiene masa, de modo que es atraída por todas las demás masas en el universo. En particular, es atraída hacia la Tierra. No hay nada en contacto con la Luna, así que sobre ella no actúan otras fuerzas. (Esto no es del todo cierto. El Sol atrae a la Luna con una fuerza gravitacional comparable a la fuerza de la gravedad que ejerce la Tierra. Pero el Sol también atrae a la Tierra, así que la Tierra y la Luna giran juntas alrededor del Sol.)




Elegimos el sentido positivo hacia la Tierra y sumamos las fuerzas.

$$F = ma$$

$$\frac{GM_{\text{Tierra}}M_{\text{Luna}}}{R^2} = M_{\text{Luna}}\frac{v^2}{R}$$

donde $R$ es la distancia entre la Tierra y la Luna, no el radio terrestre.

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{Tierra}}}{R}}$$

La masa de la Luna se cancela. Si la Luna fuera más pesada, la fuerza sería mayor pero también habría más masa que mover y la misma aceleración.

El tiempo que tarda una revolución es la distancia dividida por la rapidez.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM_{\text{Tierra}}/R}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_{\text{Tierra}}}}$$

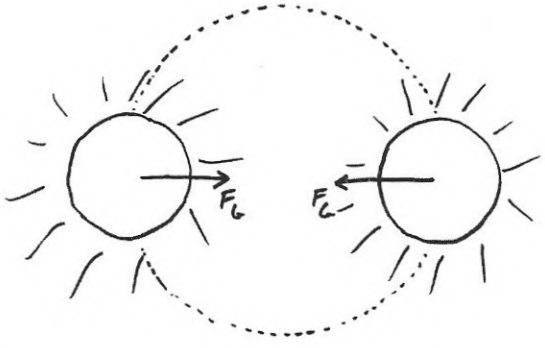
$$t = 2\pi\sqrt{\frac{(3.85 \times 10^8 \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}}$$

$$t = (2.4 \times 10^6 \text{ s})\left(\frac{1 \text{ día}}{86\,400 \text{ s}}\right)$$

$$t = 27.5 \text{ días}$$

**EJEMPLO**

Una "estrella binaria" consta de dos estrellas de igual masa que giran alrededor del punto medio entre ellas. En cierto sistema binario, la masa de cada estrella es $1.7 \times 10^{30}$ kg y la distancia entre ellas es de $9 \times 10^{10}$ m. ¿Cuánto tarda una revolución de las estrellas?




Ambas estrellas tienen masa, así que se atraen mutuamente. Aplicamos la segunda ley de Newton en una estrella con el sentido positivo hacia la otra.

$$F = ma$$

$$\frac{GMM}{R^2} = M\frac{v^2}{R}$$

donde $R$ en el lado izquierdo es la distancia entre las estrellas y $R$ en el lado derecho es el radio de la órbita de las estrellas. ¡No son iguales! En el ejemplo de la Luna eran iguales porque la Tierra está en el centro de la órbita circular de la Luna. En este caso no son iguales, así que

$$\frac{GMM}{(2R)^2} = M\frac{v^2}{R}$$

donde $R$ es el radio de la órbita de las estrellas y $2R$ es la distancia entre las estrellas.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{4R}}$$

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM/4R}} = 4\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$t = 4\pi\sqrt{\frac{(4.5 \times 10^{10}\ \text{m})^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2)(1.7 \times 10^{30}\ \text{kg})}}$$

$$t = (1.1 \times 10^7\ \text{s})\left(\frac{1\ \text{día}}{86\,400\ \text{s}}\right)$$

$$t = 130\ \text{días}$$

*LECCIÓN*

Asegúrese de comprender lo que significan los símbolos. A veces usamos los mismos símbolos u otros similares en el mismo capítulo para representar dos cosas distintas. Evite usar el mismo símbolo para representar dos cosas distintas en el mismo problema.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

Siempre que maneje fuerzas:

- Trace un diagrama de cuerpo libre.
- Elija uno de los ejes paralelo a la aceleración.
- Sume las fuerzas en cada dirección e iguale la suma con $ma$.
- Resuelva a partir de ahí.

Recuerde:

- La fricción puede hacer que algo comience a moverse dado que se opone al deslizamiento, no al movimiento.
- La fricción estática tiene un límite $\mu_s N$, pero no siempre es de esa magnitud.
- Si algo se mueve en círculo, su aceleración es $v^2/R$.
- La fuerza centrípeta nunca se incluye en el diagrama de cuerpo libre porque no es una fuerza, sólo un nombre.

CAPÍTULO 5

# *ENERGÍA*

En general, disponemos de dos maneras de abordar los problemas. El primer método consiste en emplear las leyes de Newton, el cual acabamos de considerar. El segundo es aplicar una ley de conservación. Si es posible utilizar una ley de conservación para resolver un problema, éste suele ser el método más sencillo. La conservación de la energía es la más sencilla de las leyes de conservación.

En un sentido limitado, los chocolates se conservan. Con esto queremos decir que los chocolates no aparecen de manera espontánea ni se desvanecen en el aire. Si resulta que tengo más chocolates de los que tenía antes, debo haber comprado algunos. Si tengo menos de los que tenía antes, alguien debe haberlos tomado (y probablemente comido). Si tenía seis chocolates y ahora tengo cuatro, y sé que no he adquirido más, entonces debo haber comido dos. Casi cualquier objeto se conserva en este sentido.

La conservación de los chocolates no es completa. La fábrica está produciendo más todo el tiempo y los ingredientes literalmente crecen en los árboles. De modo similar, el dinero se conserva de manera local, pero dado que el gobierno puede imprimir más, el dinero no se conserva de manera universal.

Algunas cosas no se conservan. Cuando dos personas inician una relación romántica, ambas suelen ser más felices. Esto no significa que el resto de las personas se vuelvan menos felices. La felicidad no se conserva.

Dado que la magnitud de una cantidad que se conserva no puede cambiar por arte de magia, cualquier cambio debe ocurrir por un proceso que podemos observar. La manera más fácil de expresar esto con una ecuación es

$$A_{\text{inicial}} + \Delta A = A_{\text{final}}$$

Esto se cumple para cualquier cantidad que se conserva. Por ejemplo, el dinero se conserva (localmente). Si el lector entra a un establecimiento de comida rápida con $10 y sale con $6, entonces yo sé que gastó $4, aunque no lo haya visto hacerlo. Si yo compro seis chocolates y me como uno, pero resulta que sólo me quedan tres, entonces mi hermanita debe haber tomado dos.

## 5.1 ENERGÍA Y TRABAJO

La energía es la capacidad de mover objetos, aunque puede hacer mucho más. También es la capacidad de producir música. El viento tiene energía, porque puede impulsar un molino que muele grano o una turbina que acciona un generador y crea electricidad, la cual hace funcionar mi reproductor de discos compactos y su amplificador para tocar una melodía. Esta concepción de la energía funciona porque el sonido es una forma de energía, así que todo aquello que pueda convertirse en sonido es también una forma

de energía. La energía existe en muchas formas y puede transformarse de una forma en otra, aunque la transformación puede ser incompleta, ineficiente o costosa.

Aquí nos interesan principalmente las formas de la energía y el trabajo llamadas energía mecánica, la cual incluye la energía cinética y la energía potencial. La energía cinética es la energía que tienen los objetos en movimiento y es igual a $EK = \frac{1}{2}mv^2$. Los objetos que giran también tienen energía cinética y se les analizará llegado el momento. La unidad de energía y trabajo es el joule, que es igual a un newton multiplicado por un metro.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

El trabajo es el cambio en la energía mecánica. En términos matemáticos, el trabajo es la fuerza multiplicada por el desplazamiento, o

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d}$$

El "producto punto" significa que sólo nos interesa la parte del vector $\boldsymbol{F}$ que es paralela al vector $\boldsymbol{d}$. Por ejemplo, cuando la fuerza que actúa sobre un automóvil tiene el mismo sentido que su movimiento (hacia adelante), el automóvil acelera y la energía aumenta. Dado que la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido, el trabajo realizado es positivo, lo cual concuerda con el aumento de energía del automóvil. Si la fuerza que actúa sobre el automóvil tiene sentido opuesto al de su movimiento, el automóvil disminuye su marcha y la energía decrece. Dado que la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos opuestos, el trabajo realizado es negativo, lo cual concuerda con el decremento en la energía del automóvil. El trabajo suele calcularse mediante

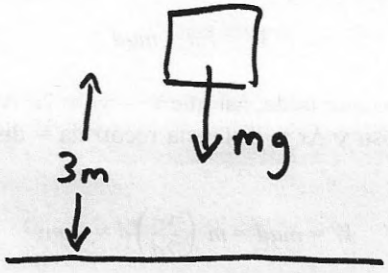
$$W = Fd \cos \theta$$

donde $\theta$ es el ángulo entre la fuerza $F$ y el desplazamiento $d$.

Consideremos un ejemplo de trabajo negativo. Si un automóvil está en movimiento y deseamos detenerlo, debemos restarle energía, así que es necesario realizar trabajo negativo sobre el automóvil. Esta energía se convierte entonces en alguna otra forma de energía. Por ejemplo, podríamos atar una cuerda a la parte posterior del automóvil y enrollar el otro extremo de la cuerda al eje de un generador, de modo que la tensión de la cuerda detenga el automóvil al tiempo que acciona el generador, creando electricidad, que podría usarse para accionar un equipo de sonido y producir música. Cuando calculamos el trabajo usamos un ángulo de 180°; el coseno de 180° es – 1, de modo que tenemos un trabajo negativo.

**EJEMPLO**

Una caja de 6 kg se deja caer desde una altura de 3 m. ¿Con qué rapidez golpea el suelo?



Podríamos resolver el problema empleando técnicas de aceleración constante. Sin embargo, para demostrar la energía, usaremos la conservación de la energía.

$$E_{\text{antes}} + W = E_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W = \frac{1}{2}mv^2$$

La única fuerza que actúa sobre la caja es la gravedad, así que el trabajo realizado es la fuerza de la gravedad multiplicada por la distancia recorrida.

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + (mg)d = \frac{1}{2}mv^2$$

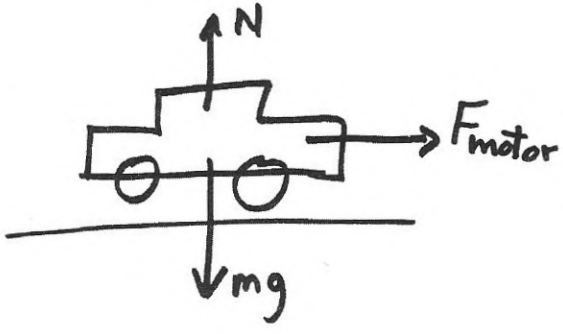
$$gd = \frac{1}{2}v^2$$

$$v = \sqrt{2gd} = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})}$$

$$v = 7.7 \text{ m/s}$$

**EJEMPLO**

¿Cuánto trabajo necesita realizar el motor para acelerar desde el reposo hasta 35 mph un automóvil de 1500 kg?




Supongamos primero que la aceleración es constante. Esto no es necesariamente cierto, pero tal vez no se aleje mucho de la realidad; además, sin esta suposición, tendríamos que recurrir al cálculo.

$$W = Fd = mad$$

No nos interesa el tiempo que tarda, así que $v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$, donde $v_0 = 0$ porque el automóvil parte del reposo y $\Delta x$ = distancia recorrida = distancia durante la cual se aplica la fuerza = $d$.

$$W = mad = m\left(\frac{v^2}{2d}\right)d = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W = \frac{1}{2}(1500\text{ kg})\left[(35\text{ mi/h})\left(\frac{1610\text{ m}}{1\text{ mi}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right)\right]^2$$

$$W = 1.843 \times 10^5\text{ J} \quad \text{o} \quad 184\text{ kJ}$$

Ésta es aproximadamente la energía de 0.004 galones de gasolina. Dado que los motores de gasolina no son perfectamente eficientes, se requiere aproximadamente 1% de un galón de gasolina para acelerar un automóvil hasta la velocidad promedio para circular en las ciudades.

De manera alternativa, podemos usar la conservación de la energía.

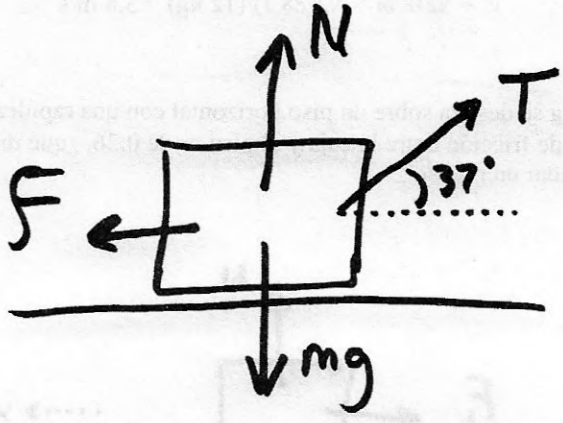
$$E_0 + W = E$$
$$EK_0 + W = EK$$
$$\frac{1}{2}m(0)^2 + W = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

Ésta es la misma ecuación de antes, pero no requiere que la aceleración sea constante. También evita la necesidad de manipulaciones engorrosas de las ecuaciones.

**EJEMPLO**

Una caja de 12 kg se arrastra 3.0 m por el piso tirando de ella con una cuerda. La cuerda tiene una tensión de 60 N y está 37° arriba de la horizontal. El coeficiente de fricción entre la caja y el piso es de 0.23. ¿Cuál es la rapidez de la caja cuando se deja de aplicar la tensión?




Podemos usar la conservación de la energía para encontrar la rapidez de la caja.

$$EK + W = EK'$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + W = \frac{1}{2}m(v')^2$$

El trabajo realizado por la cuerda es

$$W_T = Fd \cos \theta = (60 \text{ N})(3 \text{ m}) \cos 37° = 144 \text{ J}$$

El trabajo realizado por la gravedad es

$$W_{mg} = Fd \cos \theta = (12 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(3\text{m}) \cos 90° = 0$$

El trabajo realizado por la fuerza normal es

$$W_N = Fd \cos \theta = (N)(3 \text{ m}) \cos 90° = 0$$

El trabajo realizado por la fricción es

$$W_{\mathcal{F}} = Fd \cos \theta = \mu N d \cos 180°$$

Calculamos la fuerza normal como antes.

$$+N + T \text{ sen } 37° - mg = ma_y = 0$$
$$N = mg - T \text{ sen } 37°$$
$$N = (12 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - (60 \text{ N}) \text{ sen } 37°$$
$$N = 81.5 \text{ N}$$
$$W_{\mathcal{F}} = (0.23)(81.5 \text{ N})(3 \text{ m}) \cos 180° = -56 \text{ J}$$

El trabajo realizado por todas las fuerzas es

$$144 \text{ J} + 0 + 0 + (-56 \text{ J}) = 88 \text{ J}$$

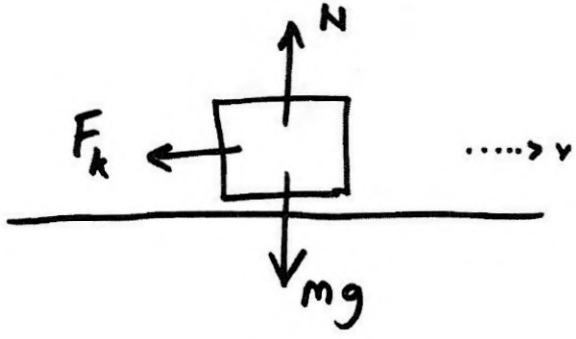
La rapidez de la caja es

$$0 + W = \frac{1}{2} m(v')^2$$

$$v' = \sqrt{2W/m} = \sqrt{2(88 \text{ J})/(12 \text{ kg})} = 3.8 \text{ m/s}$$

**EJEMPLO**

Una caja de 14 kg se desliza sobre un piso horizontal con una rapidez inicial de 6 m/s. Si el coeficiente de fricción entre la caja y el piso es de 0.26, ¿qué distancia recorre la caja antes de quedar en reposo?



Utilizando la conservación de la energía,

$$E_{\text{antes}} + W = E_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + W = 0$$

Las fuerzas que actúan sobre la caja son la gravedad, la fuerza normal debida al piso y la fuerza de fricción del piso. Las dos primeras son verticales y el desplazamiento es horizontal, de modo que estas fuerzas son perpendiculares al movimiento y no realizan trabajo. La única fuerza que lo efectúa es la fricción, la cual está en el sentido opuesto al movimiento y por lo tanto realiza trabajo negativo. La fuerza de fricción es $\mu N = \mu mg$, dado que no hay aceleración vertical y las fuerzas verticales suman cero.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - (\mu mg)d = 0$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \mu gd = 0$$

$$d = \frac{v_0^2}{2\,\mu g} = \frac{(6\text{ m/s})^2}{2(0.26)(9.8\text{ m/s}^2)} = 7.1\text{ m}$$

## 5.2 ENERGÍA POTENCIAL

Algunos tipos de trabajo pueden expresarse como energía potencial. La energía potencial es trabajo realizado en el pasado que puede volver a convertirse en trabajo. La gravedad, por ejemplo, tiene energía potencial y también la tiene un resorte comprimido. Por otro lado, el trabajo efectuado por la fricción no puede expresarse como energía potencial.

Lo que hace a la gravedad diferente es que si uno levanta una caja sobre la cabeza, el trabajo realizado por la gravedad durante el proceso no depende de la trayectoria seguida; el trabajo realizado por la gravedad es el mismo, ya sea que uno levante la caja verticalmente, la empuje sobre una rampa o siga una trayectoria curva. Una manera rápida (e hipotética) de verificarlo consiste en mover el objeto de ida y vuelta o en un círculo para colocarlo de nuevo en el punto de partida; si el trabajo realizado por una fuerza *debe* ser cero, entonces podría ser posible usar la energía potencial para expresar esa fuerza. Si movemos una caja de ida y vuelta sobre el piso, la fuerza de fricción siempre actúa en sentido contrario al del movimiento y el trabajo realizado por la fuerza de fricción es negativo, no cero, por lo que la fricción no puede expresarse como energía potencial.

La razón por la que usamos energía potencial es que la energía no depende de la trayectoria, sólo de la posición. Esto hace *más fácil calcular la energía potencial que el trabajo*. Si empleamos energía potencial para expresar el trabajo realizado por una fuerza, entonces no incluimos el trabajo efectuado por esta fuerza cuando calculamos el trabajo. Hay tres fuerzas que por lo general pueden expresarse como energía potencial: la gravedad, la acción de resorte y la electricidad. La electricidad se abordará más adelante, pero las otras dos se consideran aquí.

La energía potencial de la gravedad es

$$EP_{\text{gravedad}} = mgh$$

En otras palabras, el trabajo que realizamos al levantar algo es la fuerza *mg* multiplicada por la distancia *h*. ¿Cuál es esta altura? Podemos elegir *cualquier* punto como la altura cero a partir de la cual se medirán todas las alturas. Cada vez que usemos la conservación de la energía en una ecuación estarán presentes la energía potencial antes y la energía potencial después, de modo que sólo importa el cambio de energía potencial. Por lo tanto, podemos elegir cualquier punto como la altura cero, pero una vez que lo hemos elegido debemos apegarnos a él durante todo el problema (como con los ejes de coordenadas).

**EJEMPLO**

¿Cuánto trabajo se requiere para cargar una mochila de 30 libras durante 10 millas en terreno nivelado?

Podemos calcular directamente el trabajo o usar la conservación de la energía.

Usemos primero la conservación de la energía.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + mgh + W = \frac{1}{2}m(0)^2 + mgh'$$

La altura es la misma antes y después, así que se cancela, y el trabajo es cero. Dado que la rapidez de la mochila no aumentó y su altura no cambió, la energía tampoco cambió, por lo que el trabajo es cero. Es cierto que el excursionista debió realizar un poco de trabajo al principio para poner en movimiento la mochila, pero también realizó un poco de trabajo negativo al final para detenerla, y ambos se cancelan.

Ahora resolvamos el mismo problema determinando el trabajo de manera directa. La fuerza que se aplica a la mochila es ascendente y de la misma magnitud que la gravedad, de modo que la fuerza total aplicada a la mochila es cero. Sin fuerza total, la mochila no tiene aceleración y recorre las 10 millas a velocidad constante. La fuerza que aplicamos es ascendente, o sea perpendicular al movimiento horizontal, así que el trabajo realizado es cero.

**EJEMPLO**

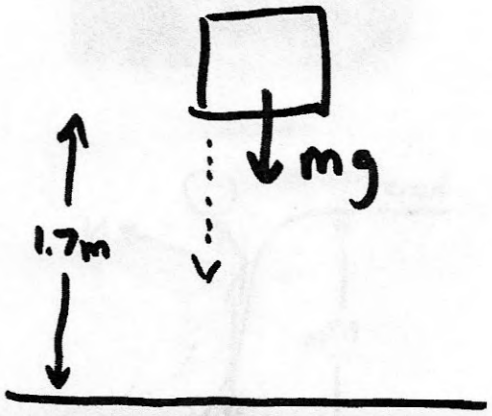
Si una caja de 11 kg se deja caer desde una altura de 1.7 m, ¿cuál será su rapidez al tocar el suelo?

Podríamos resolver el problema usando aceleración constante.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$$

$$v^2 - 0 = 2(9.8\ \text{m/s}^2)(1.7\ \text{m})$$

$$v = 5.8\ \text{m/s}$$




Deseamos usar la conservación de la energía (como demostración). Elegimos el piso como la altura cero.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + mgh + W = \frac{1}{2}mv^2 + mg(0)$$

La única fuerza que actúa sobre la caja al caer es la gravedad. Dado que el trabajo efectuado por la gravedad lo hemos expresado como energía potencial gravitacional, no incluimos esa fuerza cuando calculamos el trabajo. Puesto que no hay otras fuerzas, no hay trabajo. (De manera alternativa, podríamos haber omitido la energía potencial e incluido el trabajo realizado por la gravedad, $W = Fd = mgh$.)

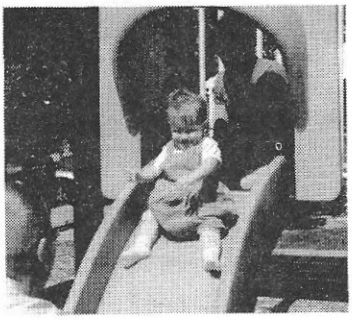
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

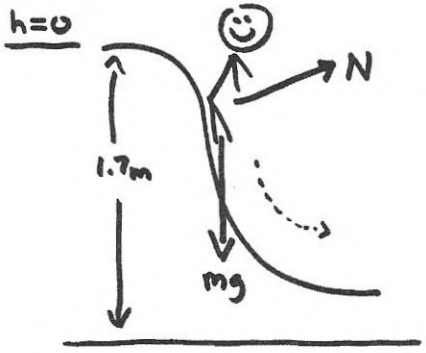
$$(9.8\ \text{m/s}^2)(1.7\ \text{m}) = \frac{1}{2}v^2$$

$$v = 5.8\ \text{m/s}$$

**EJEMPLO**

Si una niña de 11 kg se desliza por una resbaladilla sin fricción desde una altura de 1.7 m, ¿con qué rapidez llega al suelo?






Como la resbaladilla no es recta, la aceleración no es constante y no podemos usar técnicas de aceleración constante. Usaremos entonces la conservación de la energía. Para variar, elegimos el punto más alto del juego como la altura cero:

$$EK_i + EP_i + W = EK_f + EP_f$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + mg(0) + W = \frac{1}{2}m(v_f)^2 + mgh_f$$

donde $h_f = -1.7$ m.

Las únicas fuerzas que actúan sobre la niña cuando se desliza son la gravedad y la fuerza normal. Dado que hemos expresado el trabajo realizado por la gravedad como la energía potencial gravitacional, no incluimos esa fuerza cuando calculamos el trabajo. La fuerza normal siempre es perpendicular a la superficie y el movimiento siempre es paralelo a la superficie. Ambos son perpendiculares entre sí, de modo que el trabajo realizado por la fuerza normal es cero.

$$0 = \frac{1}{2}m(v_f)^2 + mgh_f$$

$$-\frac{1}{2}(v_f)^2 = (9.8 \text{ m/s}^2)(-1.7 \text{ m})$$

$$v_f = 5.8 \text{ m/s}$$

El resultado es el mismo que en el ejemplo previo. El trabajo realizado por la gravedad es el mismo, porque podemos expresarlo como una energía potencial que depende sólo de los puntos extremos. El trabajo efectuado por otras fuerzas (la fuerza normal) es cero, por lo que la energía cinética es la misma y la rapidez es la misma.

*LECCIÓN*

La ventaja de usar una ley de conservación es que funciona aunque la aceleración no sea constante.

**EJEMPLO**

Una grúa eleva dos pisos (7.2 m) un piano de 300 kg. ¿Cuánto trabajo realiza la grúa sobre el piano?

Podríamos encontrar el trabajo directamente multiplicando la fuerza por la distancia. Para ello debemos suponer que la grúa levanta el piano con rapidez constante, de modo que la fuerza normal es igual al peso. Intentemos en cambio con la conservación de la energía, eligiendo la posición de partida como la altura cero.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + mg(0) + W = \frac{1}{2}m(0)^2 + mgh$$

$$W = mgh = (300\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(7.2\text{ m})$$

$$W = 2.1 \times 10^4\text{ J} \quad \text{o} \quad 21\text{ kJ}$$

Este trabajo es realizado por la fuerza normal. Ésta empuja hacia arriba, mientras que el movimiento también es ascendente. La fuerza normal incrementa la rapidez del piano mientras que la gravedad la reduce.

*LECCIÓN*

Si la superficie no se mueve, la fuerza normal no realiza trabajo.

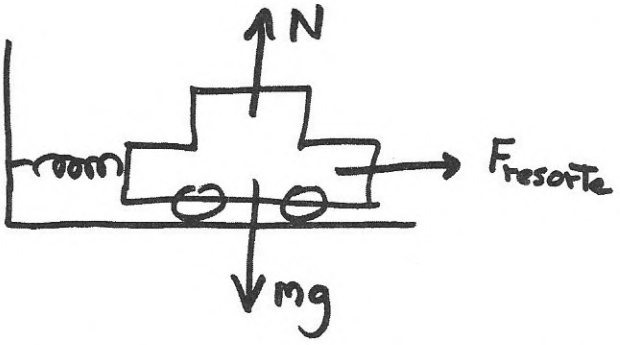
Los resortes ejercen otra fuerza que puede analizarse mediante la energía potencial. La fuerza de un resorte es $F = -kx$, donde $k$ es la "constante del resorte" y $x$ es la distancia que el resorte se estira o se comprime. Cuando el resorte se comprime, su fuerza cambia y también lo hace la aceleración. La energía potencial es el trabajo realizado al comprimir el resorte, que es

$$EP_{\text{resorte}} = \frac{1}{2}kx^2$$

¿Por qué el "1/2"? El trabajo es la distancia $x$ multiplicada por la fuerza promedio $\frac{1}{2}kx$.

**EJEMPLO**

Un resorte horizontal ($k = 1000$ N/m) se comprime 6 cm y frente a él se coloca un carrito de juguete de 3 kg. ¿Qué rapidez alcanza el carrito cuando se libera el resorte?




Para resolver el problema empleando fuerzas se requeriría encontrar la aceleración, la cual cambia al variar la compresión del resorte. Esto llevaría a una ecuación diferencial y a un problema muy difícil. Asimismo, para hallar el trabajo es necesario encontrar una fuerza que cambia con el tiempo y la posición, lo que también constituye un problema difícil.

Por otro lado, la energía potencial de un resorte comprimido es $EP = \frac{1}{2}kx^2$. Utilizando la conservación de la energía,

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + \left(\frac{1}{2}kx^2 + mgh\right) + W = \frac{1}{2}m(v')^2 + \left(\frac{1}{2}k(0)^2 + mgh'\right)$$

El trabajo no incluye el realizado por la gravedad o el resorte, porque ya los incluimos al usar la energía potencial. La energía potencial gravitacional se cancela porque $h = h'$. La única otra fuerza es la fuerza normal del piso, pero ésta es vertical y el movimiento es horizontal, por lo que no realiza trabajo.

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(v')^2$$

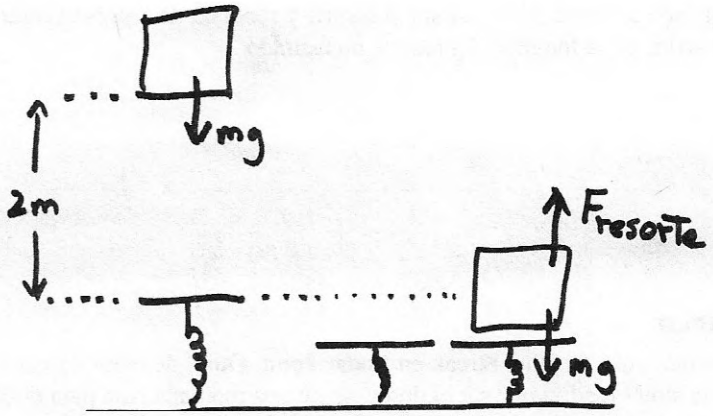
$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{(1000 \text{ N/m})(0.06 \text{ m})^2}{3 \text{ kg}}}$$

$$v = 1.1 \text{ m/s}$$

**EJEMPLO**

Una caja de 4 kg se deja caer desde una altura de 2 m sobre un resorte vertical ($k = 1200$ N/m). ¿Cuánto se comprime el resorte justo antes de que la caja quede momentáneamente en reposo?




El punto en el cual la caja se detiene (momentáneamente) no corresponde al instante en que las fuerzas del resorte y de la gravedad son iguales. Cuando las fuerzas son iguales, la aceleración es cero, pero para que la caja se detenga la aceleración debe ser ascendente, opuesta a la velocidad.

Como en el último ejemplo, la fuerza sobre la caja cambia con el tiempo a medida que el resorte se comprime, lo cual hace muy difícil resolver este problema con base en las fuerzas. En cambio, utilizamos la conservación de la energía y elegimos la parte superior del resorte no comprimido como la altura cero,

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$EK_A + EP_A + W = EK_C + EP_C$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + \left(\frac{1}{2}k(0)^2 + mgh\right) + W = \frac{1}{2}m(0)^2 + \left(\frac{1}{2}kx^2 + mg(-x)\right)$$

donde $x$ es la distancia que se comprime el resorte, punto en el cual la altura de la caja está a una distancia $x$ abajo del cero. El trabajo es cero, ya que las únicas fuerzas son la gravitacional y la del resorte, y ambas se consideraron al usar la energía potencial.

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0$$

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{(-mg)^2 - 4(\frac{1}{2}k)(-mgh)}}{2(\frac{1}{2}k)}$$

$$x = \frac{(4\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) \pm \sqrt{[(4\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)]^2 + 2(1200\text{ N/m})(4\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(2\text{ m})}}{(1200\text{ N/m})}$$

$$x = \frac{(39.2\text{ kg m/s}^2) \pm (435.5\text{ kg m/s}^2)}{(1200\text{ N/m})}$$

$$x = 0.396\text{ m} \quad \text{o} \quad -0.330\text{ m}$$

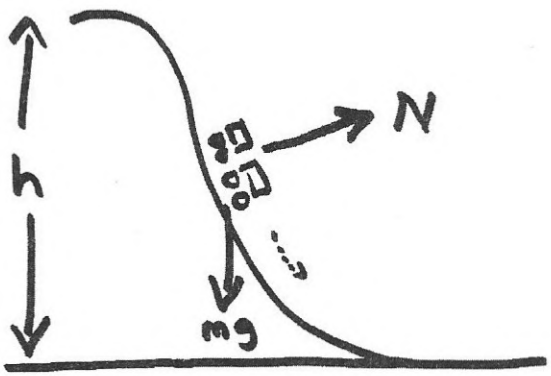
La caja baja 39.6 cm. Si se atorara al resorte y rebotara de regreso estirándolo, subiría 33 cm arriba de la longitud del resorte no estirado.

*LECCIÓN*

Los problemas con aceleración variable son mucho más fáciles de resolver usando energía que usando fuerzas. Los resortes casi siempre dan lugar a una aceleración cambiante.

**EJEMPLO**

La montaña rusa de Blue Streak en Cedar Point, Ohio, tiene un descenso de 72 pies. ¿De qué altura tendría que ser el descenso de una montaña rusa para doblar la rapidez alcanzada en la montaña rusa de Blue Streak?




La aceleración no es constante, así que utilizamos la conservación de la energía y elegimos el pie de la pendiente como la altura cero.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + mgh + W = \frac{1}{2}mv^2 + mg(0)$$

El trabajo realizado por la gravedad se considera en la energía potencial. El trabajo realizado por la fuerza normal es cero porque ésta es perpendicular al movimiento. El trabajo realizado por la fricción es difícil de calcular, pero lo suficientemente pequeño para pasarlo por alto aquí.

$$mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

donde $v$ es la rapidez de la montaña rusa de Blue Streak al pie de la pendiente.

La pregunta aquí no es cuán rápido avanza el carro en la montaña rusa de Blue Streak ($v$), sino qué altura ($h$) se necesitaría para alcanzar una rapidez del doble. Utilizando $h'$ como la altura de la nueva montaña rusa y $v'$ como la rapidez en ella,

$$gh' = \frac{1}{2}v'^2$$

$$h' = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{(2v)^2}{g} = 4\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}\right)$$

En este punto sustituimos el resultado para la montaña rusa original.

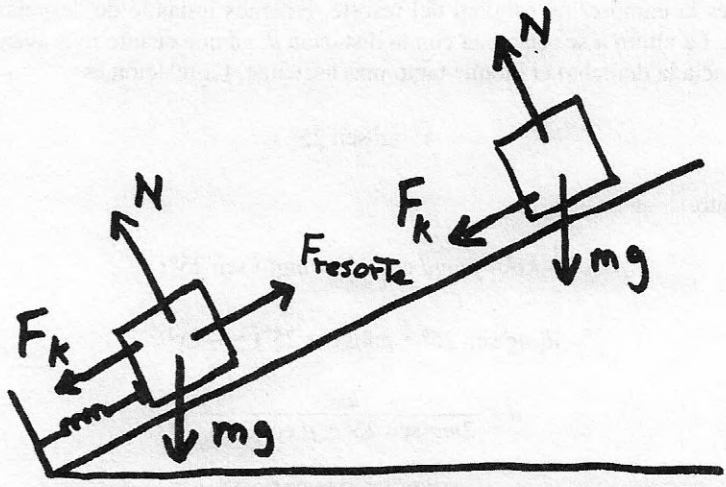
$$h' = 4\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} = 4\frac{gh}{g} = 4h$$

La nueva montaña rusa debe ser cuatro veces más alta (casi 300 pies) para tener el doble de rapidez.

No lejos de Blue Streak está la nueva montaña rusa Millenium Force, más alta y más rápida. Es poco más de cuatro veces más alta y alrededor del doble de rápida.

**EJEMPLO**

Un resorte se comprime cerca del extremo inferior de una rampa. Si la masa del bloque es de 0.42 kg, el resorte ($k = 1800$ N/m) se comprime 0.060 m, el ángulo es de 25° y el coeficiente de fricción cinética es de 0.18, ¿cuánto asciende por la rampa el bloque al soltar el resorte?




Dado que la fuerza del resorte no es constante, la aceleración tampoco lo es y el uso de fuerzas no ayuda mucho. Intentemos en cambio con la conservación de la energía, eligiendo la posición de partida del bloque como la altura cero.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + \left(mg(0) + \frac{1}{2}kx^2\right) + W = \frac{1}{2}m(0)^2 + \left(mgh' + \frac{1}{2}k(0)^2\right)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + W = mgh'$$

El trabajo realizado por el resorte y por la gravedad se manejan mediante energía potencial. La fuerza normal es perpendicular al movimiento, de modo que el trabajo realizado por ella es cero. La fuerza de fricción realiza trabajo negativo frenando el bloque, porque dicha fuerza y el movimiento tienen sentidos opuestos. Encontramos la fuerza normal como lo hicimos antes. El trabajo efectuado por la fricción es

$$W_F = F_F d \cos\theta = (\mu N)d \cos 180°$$

La fuerza normal es

$$+N - mg \cos 25° = ma_y = 0$$

$$N = mg \cos 25°$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - \underbrace{\mu\, mg \cos 25°}_{N}\, d = mgh'$$

En esa ecuación, $d$ es la distancia a lo largo de la rampa, $h$ es la altura (distancia vertical) y $x$ es la compresión original del resorte. Estamos tratando de despejar $d$ con $x$ conocida. La altura $h$ se relaciona con la distancia $d$, ya que cuanto más avanza por la rampa (hacia la derecha) el bloque tanto más asciende. La relación es

$$h' = d \operatorname{sen} 25°$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}kx^2 - \mu mgd \cos 25° = mg(d \operatorname{sen} 25°)$$

$$d(mg \operatorname{sen} 25° + \mu mg \cos 25°) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$d = \frac{kx^2}{2mg(\operatorname{sen} 25° + \mu \cos 25°)}$$

$$d = \frac{(1800 \text{ N/m})(0.060 \text{ m})^2}{2(0.42 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(\operatorname{sen} 25° + 0.18 \cos 25°)}$$

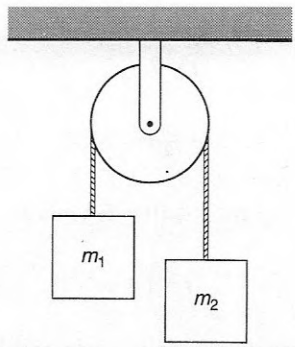
$$d = 1.3 \text{ m}$$

## 5.3 USO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Muchos problemas pueden resolverse aplicando la conservación de la energía, pero en muchos otros esto no es posible. En esta sección exploraremos algunas de las razones por las que ciertos problemas no puedan resolverse empleando la conservación de la energía.

**EJEMPLO**

Se tiene una máquina de Atwood que consta de dos bloques, con masa de 15 kg y 5 kg, que penden de una polea sin masa y sin fricción. ¿Con qué rapidez se moverán los bloques después de que cada uno se ha movido 3 m y cuánto tiempo tomará para que esto ocurra?




Podríamos usar fuerzas para determinar la aceleración, que sería constante, y luego usar técnicas de aceleración constante para encontrar la velocidad. En cambio, intentémoslo con la conservación de la energía, tomando el punto de partida de cada bloque como la altura cero para ese bloque.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(0)^2 + 0 + W = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + [m_1 g(\text{h}) + m_2 g(-\text{h})]$$

donde $h = 3$ m. El trabajo realizado por la gravedad se ha considerado en la energía potencial, de modo que sólo necesitamos encontrar el trabajo realizado por las fuerzas de tensión.

El trabajo efectuado por la tensión de la izquierda sobre el bloque de 5 kg es positivo, porque la fuerza tiene el mismo sentido que el movimiento y porque la tensión aumenta la rapidez del bloque. El trabajo realizado por la tensión de la derecha en el bloque de 15 kg es negativo, porque la fuerza tiene el sentido opuesto al movimiento y porque la tensión detiene el bloque, disminuyendo su rapidez. Cualquiera que sea el trabajo positivo que la tensión de la izquierda realiza en el bloque de 5 kg, la tensión de la derecha hace la misma cantidad de trabajo negativo en el bloque de 15 kg. Las fuerzas son las mismas y las distancias son las mismas, de modo que los trabajos son los mismos, pero de sentido opuesto. El trabajo total realizado en el sistema (aparte de la gravedad) es cero.

$$0 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + gh\,(m_1 - m_2)$$

$$0 = \tfrac{1}{2}(20\text{ kg})v^2 + (9.8\text{ m/s}^2)(3\text{ m})(-10\text{ kg})$$

$$v = \sqrt{(9.8\text{ m/s}^2)(3\text{ m})} = 5.4\text{ m/s}$$

Si suponemos que la aceleración es constante, entonces podemos encontrar el tiempo.

$$\Delta x = 3\text{ m}$$
$$v_0 = 0$$
$$v = 5.4\text{ m/s}$$
$$a =$$
$$t = ?$$

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$(3\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(0 + 5.4\text{ m/s})t$$

$$t = 1.1\text{ s}$$

Si hubiéramos utilizado fuerzas para resolver este problema, primero habríamos encontrado la aceleración para usarla en el cálculo de la rapidez. Al usar energía procedemos a la inversa, encontrando primero la rapidez y luego la aceleración. Para ello debemos saber que la aceleración es constante, pero no hay nada en nuestra solución que diga que deba ser así.

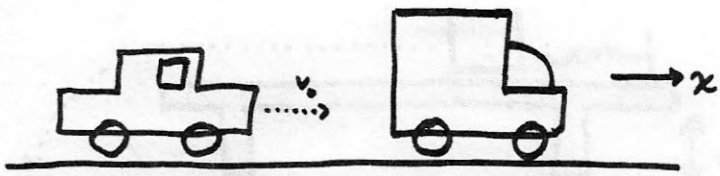
*LECCIÓN*

Las leyes de conservación funcionan bien incluso cuando la aceleración no es constante, por lo que en general no pueden usarse para encontrar la aceleración.

**EJEMPLO**

Un automóvil compacto (1200 kg) que viaja a 25 m/s choca con un camión estacionario (8000 kg), al que queda incrustado. ¿Cuál es la rapidez del par de vehículos inmediatamente después del choque?

Sería muy difícil resolver este problema usando fuerzas. La fuerza que el automóvil ejerce en el camión es la misma, pero opuesta a la fuerza que ejerce el camión en el automóvil. Sin embargo, no conocemos la fuerza ni el tiempo durante el cual se aplica la fuerza. Intentemos con la conservación de la energía.




$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$[\tfrac{1}{2}m_{\text{automóvil}}v_0^2 + \tfrac{1}{2}m_{\text{camión}}(0)^2] + [m_{\text{automóvil}}\,g(0) + m_{\text{camión}}\,g(0)] + W$$

$$= \tfrac{1}{2}(m_{\text{automóvil}} + m_{\text{camión}})\,v^2 + [m_{\text{automóvil}}\,g(0) + m_{\text{camión}}\,g(0)]$$

$$(\tfrac{1}{2}m_{\text{automóvil}}v_0^2) + W = \tfrac{1}{2}(m_{\text{automóvil}} + m_{\text{camión}})v^2$$

El trabajo realizado por la gravedad se incluye en la energía potencial y la fuerza normal es perpendicular al movimiento ($W_{\text{normal}} = 0$), así que sólo necesitamos encontrar el trabajo realizado por las fuerzas que el automóvil y el camión se ejercen mutuamente.

Las fuerzas que el automóvil y el camión ejercen uno sobre el otro son las mismas, pero las distancias no necesariamente son iguales. Durante el choque, el automóvil se deformará más que el camión (es posible que ello no sea obvio en este momento). Dado que las distancias no son las mismas, los trabajos no son iguales y opuestos, como fue el caso en el ejemplo anterior. El trabajo total no es cero, aunque sigue siendo desconocido. Sin conocer el trabajo, no podemos resolver este problema utilizando la conservación de la energía.

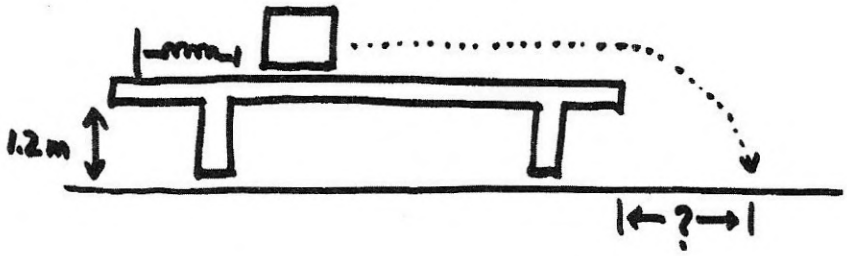
En este choque la energía total se conserva, pero parte de la energía mecánica se convierte en energía térmica: el automóvil y el camión están un poco más calientes después del choque que antes. Si se desconoce la cantidad de calor generada, no es posible utilizar la conservación de la energía (la cual sin embargo sigue cumpliéndose) para resolver el problema. Lo resolveremos en el siguiente capítulo.

*LECCIÓN*

Cuando la energía mecánica se convierte en calor (por otro medio que no sea la fricción), en general no es posible usar la conservación de la energía para resolver el problema.

**EJEMPLO**

Un rifle accionado por resorte está sobre una mesa, como se muestra. La mesa tiene 1.2 m de altura, la "bala" es un bloque libre de fricción con masa de 0.40 kg, la constante del resorte es de 1500 N/m y el resorte se comprime 0.14 m. ¿A qué distancia del borde de la mesa tocará el piso la "bala"?




Podríamos tratar de resolver este problema usando fuerzas; encontrar cuánto viajará el bloque en el aire suena como algo que ya hicimos usando aceleración constante. Sin embargo, la fuerza del resorte no es constante a medida que acelera el objeto y sería difícil encontrarla por medio de fuerzas.

Intentemos en cambio con la conservación de la energía, para lo cual elegimos el nivel de la mesa como la altura cero.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

Podemos resolver las fuerzas del resorte y de la gravedad usando energía potencial, y la fuerza normal no realiza trabajo alguno (es perpendicular al movimiento). Pero no hay nada en la ecuación que se relacione con una distancia horizontal. Incluso el trabajo realizado por la gravedad se ejerce en una distancia vertical. No podemos resolver este problema usando la energía.

Hemos visto que los métodos de aceleración constante funcionan bien para objetos que se desplazan en el aire y que los métodos basados en la energía son convenientes en el caso de resortes (cuya fuerza no es constante). Usemos cada técnica en la situación apropiada: la energía para encontrar la rapidez del objeto al despegar de la mesa y la aceleración constante para determinar la distancia que recorre.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + \left(mg(0) + \frac{1}{2}kx^2\right) + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \left(mg(0) + \frac{1}{2}k(0)^2\right)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{(1500\ \text{N/m})(0.14\ \text{m})^2}{0.40\ \text{kg}}} = 8.6\ \text{m/s}$$

Encontremos el tiempo que tarda en tocar el piso usando la aceleración constante. Si decidimos que el sentido descendente es positivo,

$$\Delta y = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$1.2 \text{ m} = (0)t + \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2(1.2 \text{ m})}{(9.8 \text{ m/s}^2)}} = 0.49 \text{ s}$$

No hay aceleración horizontal, y la distancia horizontal es

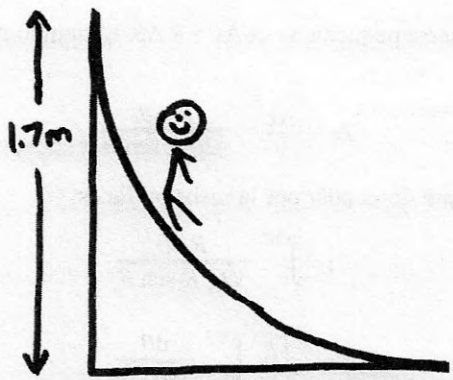
$$\Delta x = v_x t = (8.6 \text{ m/s})(0.49 \text{ s}) = 4.2 \text{ m}$$

*LECCIÓN*

Es posible usar varias técnicas, como las basadas en fuerzas y en conservación de la energía, para resolver las distintas partes del mismo problema. Utilice cada técnica en donde funcione mejor.

**EJEMPLO***

Una niña de 11 kg se desliza por una resbaladilla sin fricción que tiene la forma de un cuarto de círculo con radio de 1.7 m. ¿Cuánto tardará la niña en llegar al suelo? ¿Cuánto tardará si el coeficiente de fricción cinética entre ella y la resbaladilla es de 0.14?




Ni la velocidad ni la aceleración son constantes. Resolveremos este problema por medio del cálculo, donde el tiempo $\Delta t$ para cada distancia pequeña $\Delta x$ es $\Delta t = \Delta x/v$. Utilicemos la conservación de la energía para encontrar la rapidez $v$, eligiendo la parte superior de la resbaladilla como la altura cero.

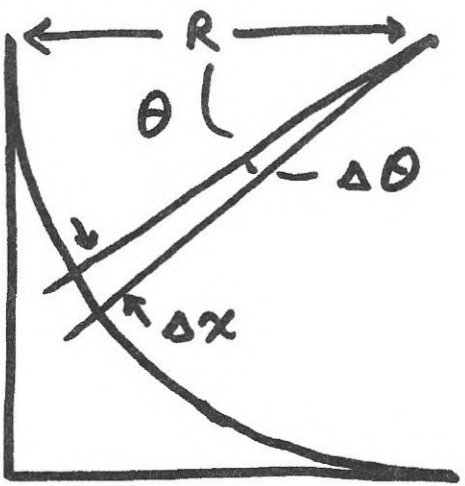
$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

* En este ejemplo se utiliza el cálculo.

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + mg(0) + (0) = \frac{1}{2}mv^2 + mg(-R \operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gR \operatorname{sen}\theta$$

$$v = \sqrt{2gR \operatorname{sen}\theta}$$




La longitud de la distancia pequeña $\Delta x$ es $\Delta x = R\,\Delta\theta$. El tiempo $\Delta t$ para cada incremento pequeño $\Delta x$ es

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{R\,\Delta\theta}{\sqrt{2gR \operatorname{sen}\theta}}$$

El tiempo necesario para descender por la resbaladilla es

$$t = \int_0^{\pi/2} \frac{R\,d\theta}{\sqrt{2gR \operatorname{sen}\theta}}$$

$$t = \sqrt{\frac{R}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}$$

$$t \approx \sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\frac{5}{3}\right)$$

donde la integral se calculó numéricamente.

$$t \approx \sqrt{\frac{(1.7\text{ m})}{2(9.8\text{ m/s}^2)}}\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$t \approx 0.49\text{ s}$$

Para resolver el problema considerando la fricción necesitaríamos encontrar el trabajo realizado por esta última. Esto significa que necesitaríamos encontrar la fuerza normal en cada punto a lo largo del recorrido, la cual depende de la aceleración, que depende de la rapidez, que depende de la fuerza de fricción en todos los puntos previos del recorrido. Para resolver este caso se requerirían complicadas ecuaciones diferenciales.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- La energía se conserva, de tal modo que

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{EK_{\text{antes}}} + \underbrace{mgh + \frac{1}{2}kx^2}_{EP_{\text{antes}}} + \overbrace{Fd\cos\theta}^{W} = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

- Si utiliza la energía potencial para una fuerza, no incluya el trabajo realizado por la misma.
- Las fuerzas que actúan perpendicularmente al movimiento no realizan trabajo.

CAPÍTULO 6

# CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Así como la energía se conserva, lo mismo ocurre con la cantidad de movimiento (algunas veces llamada momento). Cuando un camión grande choca de frente con un automóvil pequeño, esperamos ver que el automóvil rebote mientras que el camión sigue avanzando. Esto no se debe a que la fuerza que el camión ejerce sobre el automóvil sea mayor que la fuerza ejercida por el automóvil sobre el camión: dichas fuerzas son iguales. Más bien, se debe a que el camión tiene más cantidad de movimiento que el automóvil.

La conservación de la cantidad de movimiento es muy similar a la conservación de la energía. Las ecuaciones tienen la misma forma general y las técnicas son las mismas. La conservación de la cantidad de movimiento es particularmente útil en el caso de choques.

## 6.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO E IMPULSO

La cantidad de movimiento es el producto de la masa por la velocidad:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}$$

Impulso es el nombre que se le da al cambio en la cantidad de movimiento $\Delta \boldsymbol{P}$, el cual tiene, por lo tanto, las mismas unidades que la cantidad de movimiento (kg m/s o N s). La ecuación básica es

$$\boldsymbol{P}_{\text{antes}} + \Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\text{después}} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{P} + \Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}t$$

Una diferencia entre cantidad de movimiento y energía es que la cantidad de movimiento es un vector, por lo que tiene dirección y sentido.

**EJEMPLO**

Una pelota de caucho de 0.2 kg se lanza contra una pared de ladrillo con una rapidez de 4 m/s y rebota con una rapidez de 4 m/s; ¿cuál es el trabajo realizado por la pared y el impulso ejercido por ésta sobre la pelota?

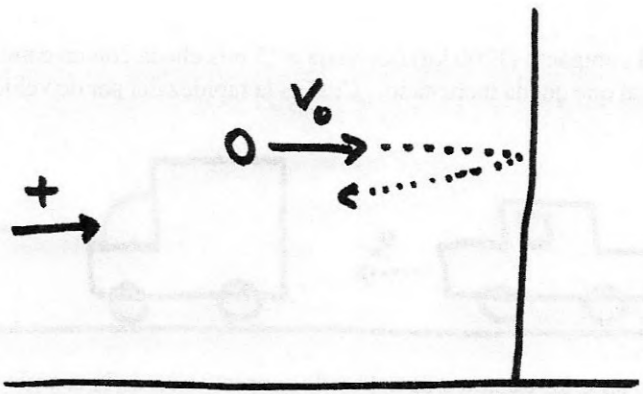
Dado que la rapidez de la pelota no cambia, tampoco lo hace la energía cinética ni la energía potencial, y el trabajo es cero.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 + mgh + W = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(-4 \text{ m/s})^2 + mgh$$

$$1.6 \text{ J} + W = 1.6 \text{ J}$$

$$W = 0$$




La magnitud de la cantidad de movimiento es la misma antes y después, pero el sentido cambia, de modo que las cantidades de movimiento no son las mismas y el impulso no es cero.

$$\boldsymbol{P}_{\text{antes}} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\text{después}}$$
$$m\boldsymbol{v}_{\text{antes}} + \Delta\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_{\text{después}}$$
$$(0.2 \text{ kg})(4 \text{ m/s})\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta\boldsymbol{P} = (0.2 \text{ kg})(-4 \text{ m/s})\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ es un vector unitario en la dirección $x$: un vector con magnitud 1 sin unidades. El impulso es

$$0.8 \text{ kg m/s}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta\boldsymbol{P} = -0.8 \text{ kg m/s}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$
$$\Delta\boldsymbol{P} = -1.6 \text{ kg m/s}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Cuando la pelota rebota en la pared, el desplazamiento es cero. La pared realiza trabajo negativo en la pelota a medida que ésta se frena, pero cuando la pelota rebota de regreso y se acelera, la pared realiza trabajo positivo. Dado que la energía de la pelota no cambia, el trabajo total que la pared realiza en la pelota es cero.

El impulso (el cambio en la cantidad de movimiento) que la pared le imprime a la pelota es la fuerza multiplicada por el tiempo. Dado que la fuerza tiene el mismo sentido ($-x$) cuando la pelota está frenándose y rebotando, y el tiempo es positivo, el impulso tiene el sentido $-x$, se aleja de la pared.

*LECCIÓN*

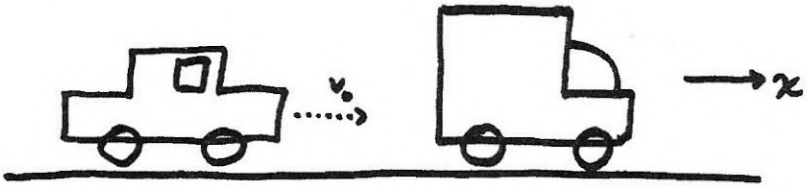
La cantidad de movimiento es un vector y tiene dirección y sentido. Un cambio de dirección o de sentido podría no cambiar la energía, pero siempre cambia la cantidad de movimiento.

## 6.2 CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y CHOQUES

La conservación de la cantidad de movimiento suele ser el mejor recurso para analizar los choques. Esto se debe a que las fuerzas que los dos objetos se aplican entre sí se cancelan.

**EJEMPLO**

Un automóvil compacto (1200 kg) que viaja a 25 m/s choca con un camión estacionario (8000 kg) al que queda incrustado. ¿Cuál es la rapidez del par de vehículos después del choque?




En el capítulo anterior tratamos de aplicar la conservación de la energía a este problema, pero no pudimos resolverlo. Intentemos ahora con la conservación de la cantidad de movimiento. Consideraremos los dos vehículos juntos, de modo que $\boldsymbol{P}$ es la cantidad de movimiento de ambos objetos.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$m_{\text{automóvil}}v_{\text{automóvil}} + m_{\text{camión}}v_{\text{camión}} + \Delta\boldsymbol{P} = m_{\text{automóvil}}\, v'_{\text{automóvil}} + m_{\text{camión}}v'_{\text{camión}}$$

La velocidad inicial del camión $v_{\text{camión}}$ es cero y los dos vehículos quedan unidos, de modo que $v'_{\text{automóvil}} = v'_{\text{camión}}$

$$m_{\text{automóvil}}\,(25\text{ m/s}) + (F_{\text{automóvil sobre camión}}t - F_{\text{automóvil sobre camión}}t) = m_{\text{par}}\, v'_{\text{par}}$$

En este caso, $t$ es el tiempo durante el cual ocurre el choque. Dejamos la notación vectorial y nos concentramos sólo en la cantidad de movimiento (y las fuerzas) en el sentido $+x$.

No conocemos la fuerza que el automóvil ejerce sobre el camión, ni la que el camión ejerce sobre el automóvil. Lo que sabemos es que son iguales. Así que la diferencia de estos términos en la ecuación debe ser cero.

$$m_{\text{automóvil}}(25\text{ m/s}) + (0t) = m_{\text{par}}\, v'_{\text{par}}$$

$$m_{\text{automóvil}}(25\text{ m/s}) = m_{\text{par}}\, v'_{\text{par}}$$

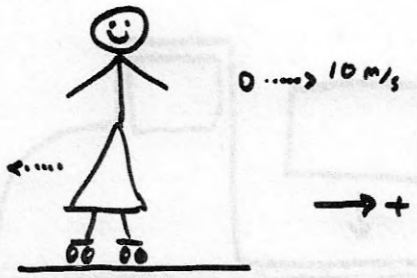
$$v'_{\text{par}} = \frac{m_{\text{automóvil}}(25\text{ m/s})}{m_{\text{par}}}$$

$$v'_{\text{par}} = \frac{(1200\text{ kg})\,(25\text{ m/s})}{(1200\text{ kg} + 8000\text{ kg})}$$

$$v'_{\text{par}} = 3.3\text{ m/s}$$

**EJEMPLO**

Una joven de 60 kg en patines lanza una pelota de 0.60 kg, imprimiéndole una rapidez de 10 m/s. ¿Cuál es la rapidez (de retroceso) de la joven después del lanzamiento?




No conocemos la fuerza que la patinadora aplica a la pelota ni la que esta última ejerce sobre ella, así que no parece buena idea usar el método de las fuerzas. Podríamos intentar con la conservación de la energía, pero no conocemos el trabajo que la joven realiza en la pelota. Tratemos entonces con la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$(m_{\text{joven}}v_{\text{joven}} + m_{\text{pelota}}v_{\text{pelota}}) + (F_{\text{joven sobre pelota}}t - F_{\text{pelota sobre joven}}t)$$
$$= (m_{\text{joven}}v'_{\text{joven}} + m_{\text{pelota}}v'_{\text{pelota}})$$

Como en el ejemplo anterior, la fuerza que la joven ejerce sobre la pelota y la fuerza que la pelota ejerce sobre la joven son iguales, pero de sentido opuesto, por lo que su suma es cero. Ni la joven ni la pelota se mueven antes del lanzamiento, de modo que los dos términos de la extrema izquierda son cero.

$$0 = (m_{\text{joven}}v'_{\text{joven}} + m_{\text{pelota}}v'_{\text{pelota}})$$

$$v'_{\text{joven}} = -\frac{m_{\text{pelota}}v'_{\text{pelota}}}{m_{\text{joven}}}$$

$$v'_{\text{joven}} = -\frac{(0.60\text{ kg})(+10\text{ m/s})}{(60\text{ kg})}$$

$$v'_{\text{joven}} = -0.10\text{ m/s} \quad \text{o} \quad -10\text{ cm/s}$$

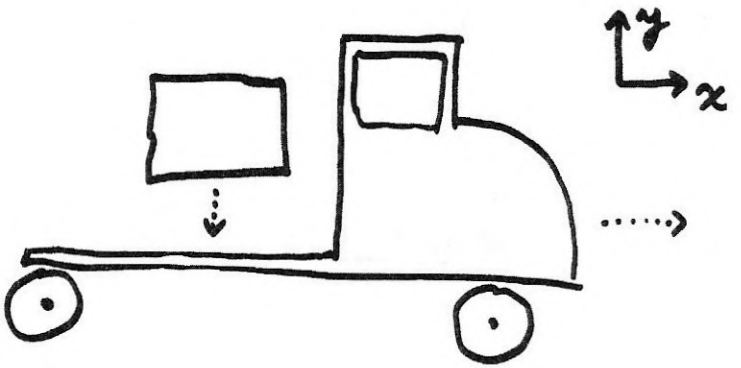
La componente horizontal de la velocidad de la patinadora es – 10 cm/s, o 10 cm/s hacia la izquierda. La patinadora se mueve con una rapidez de 10 cm/s.

*LECCIÓN*

Cuando utilizamos la cantidad de movimiento de dos (o más) objetos, cualesquiera fuerzas que ejerzan entre sí se cancelan. Podemos omitir de este modo los detalles de su interacción. Por tanto, la conservación de la cantidad de movimiento suele ser el mejor método para analizar los choques.

**EJEMPLO**

Un camión de 6000 kg avanza en punto muerto con una rapidez de 4.0 m/s sobre un camino horizontal. Al pasar por abajo de donde usted está, usted deja caer en él una caja de 1500 kg. ¿Cuál es la rapidez del camión después de que la caja empieza a moverse con él?




Cuando la caja acaba de caer en el camión, éste ya está en movimiento, pero no así la caja (en la dirección horizontal). El piso del compartimiento de carga del camión se deslizará bajo la caja. La fricción empujará la caja hacia delante (será fricción cinética, porque las superficies se deslizan entre sí), empujando al camión hacia atrás. La caja ganará rapidez y el camión la perderá hasta que las velocidades se igualen, momento en el cual dejará de haber deslizamiento.

No conocemos la fuerza de fricción, así que el uso de fuerzas para encontrar las aceleraciones no funcionará. Cuando la caja se desliza sobre el camión, parte de la energía mecánica se convierte en calor, pero como no sabemos cuánto calor se genera, no llegaremos a ninguna parte usando la conservación de la energía. Intentemos con la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

Dado que la cantidad de movimiento es un vector, la dividimos en las componentes $x$ y $y$ para analizarlas por separado.

$$P_x + \Delta P_x = P'_x \quad \text{y} \quad P_y + \Delta P_y = P'_y$$

Como queremos encontrar la velocidad $x$ del camión después de que la caja cae en él, nos concentramos en la ecuación para $x$. (En las ecuaciones de este problema el subíndice T se refiere al camión y el subíndice C a la caja.)

$$(m_T v_{x,T} + m_C v_{x,C}) + (F_{x,\text{T sobre C}}t - F_{x,\text{C sobre T}}t) = (m_T v'_{x,T} + m_C v'_{x,C})$$

Como antes, las fuerzas ejercidas por el camión sobre la caja y por la caja sobre el camión son iguales, pero de sentido opuesto, así que su suma es cero. La caja no se mueve en la dirección $x$ antes de caer en el camión, de modo que $v_{x,C} = 0$.

$$m_T v_{x,T} = (m_T v'_{x,T} + m_C v'_{x,C})$$

El camión y la caja tienen la misma velocidad final, así que $v'_{x,T} = v'_{x,C}$.

$$m_T v_{x,T} = (m_T + m_C)\, v'_{x,T}$$

$$v'_{x,T} = \frac{m_T v_{x,T}}{(m_T + m_C)}$$

$$v'_{x,\mathrm{T}} = \frac{(6000\ \mathrm{kg})(4.0\ \mathrm{m/s})}{(6000\ \mathrm{kg}) + (1500\ \mathrm{kg})}$$

$$v'_{x,\mathrm{T}} = 3.2\ \mathrm{m/s}$$

Ni siquiera necesitamos resolver la parte del problema correspondiente a $y$ para obtener la respuesta. La resolveremos de todas maneras para ver qué más podemos aprender.

$$(m_{\mathrm{T}}v_{y,\mathrm{T}} + m_{\mathrm{C}}v_{y,\mathrm{C}}) + (F_{y,\mathrm{T\ sobre\ C}}t - F_{y,\mathrm{C\ sobre\ T}}t + F_{y,\mathrm{camino\ sobre\ T}}t - F_{y,\mathrm{gravedad}}t)$$
$$= (m_{\mathrm{T}}v'_{y,\mathrm{T}} + m_{\mathrm{C}}v'_{y,\mathrm{C}})$$

Las fuerzas que el camión y la caja ejercen entre sí se cancelan, $v_{y,\mathrm{T}} = 0$ y $v'_{y,\mathrm{T}} = v'_{y,\mathrm{C}} = 0$.

$$(m_{\mathrm{C}}v_{y,\mathrm{C}}) + (F_{y,\mathrm{camino\ sobre\ T}}t - F_{y,\mathrm{gravedad}}t) = 0$$

Cuando la caja tocó el camión, el camino debió haber empujado hacia arriba el camión con una fuerza mayor que el peso combinado del camión y la caja.

*LECCIÓN*

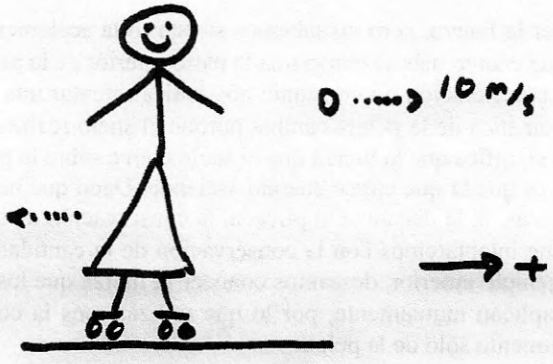
Dado que la cantidad de movimiento tiene dirección y sentido, separarla en componentes nos permite pasar por alto las fuerzas perpendiculares a la dirección de interés.

## 6.3 IMPULSO Y FUERZA

Al considerar la cantidad de movimiento de un par de objetos, pudimos eliminar las fuerzas que éstos se aplican mutuamente. Si deseamos conocer esa fuerza, o si esa fuerza es la información que conocemos, entonces no deseamos que se cancele. Para ello, debemos considerar la cantidad de movimiento de uno solo de los dos objetos.

**EJEMPLO**

Una joven de 60 kg en patines lanza una pelota de 0.60 kg, y le imparte una rapidez de 10 m/s. Si le toma 0.14 s hacer el lanzamiento, ¿cuál es la fuerza promedio que la joven ejerce en la pelota?



En un problema similar de la sección anterior utilizamos la conservación de la cantidad de movimiento para la joven y la pelota. Esto hizo que la fuerza que la joven aplica a la pelota se cancelara al sumarla a la fuerza que la pelota le aplica a la joven. Dado que deseamos conocer esta fuerza, la técnica mencionada no funcionará. Apliquemos entonces la conservación de la cantidad de movimiento sólo a la pelota.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$P_x + \Delta P_x = P_x'$$

$$m_{\text{pelota}} v_{\text{pelota}} + F_{\text{joven sobre pelota}} t = m_{\text{pelota}} v'_{\text{pelota}}$$

$$m_{\text{pelota}} (0) + F_{\text{joven sobre pelota}} t = m_{\text{pelota}} v'_{\text{pelota}}$$

$$F_{\text{joven sobre pelota}} = m_{\text{pelota}} v'_{\text{pelota}} / t$$

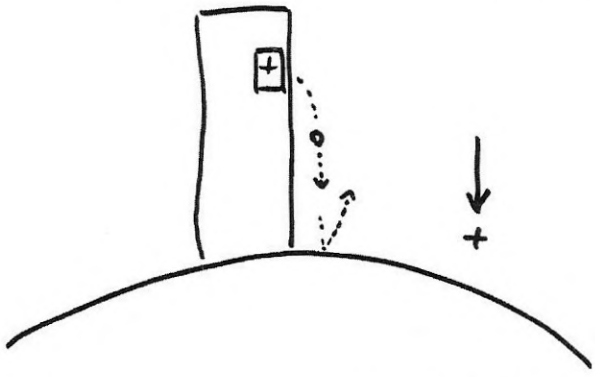
$$F_{\text{joven sobre pelota}} = (0.60 \text{ kg})(10 \text{ m/s})/(0.14 \text{ s})$$

$$F_{\text{joven sobre pelota}} = 43 \text{ N}$$

La fuerza es positiva, lo cual indica que la fuerza actúa hacia la derecha en la figura.

**EJEMPLO**

Una pelota de caucho de 300 g se deja caer desde una ventana abierta. Golpea el pavimento con una rapidez de 30 m/s y rebota con una rapidez de 20 m/s. Si el choque dura 0.025 s, ¿cuál es la fuerza promedio que ejerce el pavimento sobre la pelota?




Deseamos conocer la fuerza, pero no sabemos si ésta (o la aceleración) es constante. (No lo será, porque cuanto más se comprima la parte inferior de la pelota, tanto mayor será la fuerza.) La aceleración no constante nos indica intentar una ley de conservación. La energía cinética de la pelota cambia porque el suelo realiza trabajo negativo en la pelota. Esto significa que la fuerza que el suelo ejerce sobre la pelota cuando ésta desciende es mayor que la que ejerce cuando asciende. Dado que no conocemos ninguna de estas fuerzas, ni la distancia implicada, la conservación de la energía no luce promisoria, así que intentaremos con la conservación de la cantidad de movimiento. Igual que en el ejemplo anterior, deseamos conocer la fuerza que los dos objetos (pelota y acera) se aplican mutuamente, por lo que utilizaremos la conservación de la cantidad de movimiento sólo de la pelota.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$P_y + \Delta P_y = P'_y$$

$$m_{\text{pelota}} v_{\text{pelota}} + F_{\text{acera sobre pelota}} t = m_{\text{pelota}} v'_{\text{pelota}}$$

$$F_{\text{acera sobre pelota}} = m_{\text{pelota}} (v'_{\text{pelota}} - v_{\text{pelota}})/t$$

$$F_{\text{acera sobre pelota}} = (0.300 \text{ kg})[(-20 \text{ m/s}) - (+30 \text{ m/s})]/(0.025 \text{ s})$$

$$F_{\text{acera sobre pelota}} = -600 \text{ N}$$

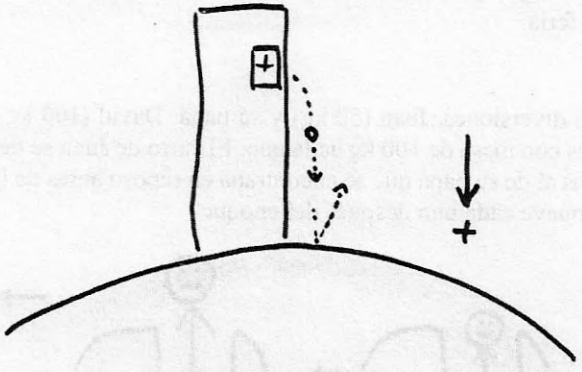
La fuerza es negativa, lo cual indica que es ascendente en la figura.

*LECCIÓN*

Si le interesan los detalles de la interacción, utilice la cantidad de movimiento de uno solo de los objetos.

**EJEMPLO**

Una pelota de caucho de 300 g se deja caer desde una ventana abierta. Golpea el pavimento con una rapidez de 30 m/s y rebota con una rapidez de 20 m/s. ¿Con qué rapidez se recupera la Tierra del choque?



Utilicemos nuevamente la conservación de la cantidad de movimiento, pero esta vez para la Tierra.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$m_{\text{Tierra}} v_{\text{Tierra}} + F_{\text{pelota sobre Tierra}} t = m_{\text{Tierra}} v'_{\text{Tierra}}$$

$$m_{\text{Tierra}} (0) + (600 \text{ N})(0.025 \text{ s}) = (6 \times 10^{24} \text{ kg})\, v'_{\text{Tierra}}$$

El valor de 600 newtons se tomó del ejemplo anterior: dado que la Tierra ejerce una fuerza ascendente de 600 N sobre la pelota, ésta ejerce una fuerza descendente de 600 N sobre la Tierra. Si el choque hubiera durado un lapso de tiempo diferente, la fuerza también habría sido distinta, pero el impulso, o cambio en la cantidad de movimiento, habría sido el mismo, ya que el cambio en la cantidad de movimiento de la pelota es el mismo. También pudimos haber resuelto este problema usando la cantidad de movi-

miento de los dos objetos, como en la sección anterior, y habríamos obtenido el mismo resultado.

$$v'_{\text{Tierra}} = (600\ \text{N})(0.025\ \text{s})/(6 \times 10^{24}\ \text{kg})$$

$$v'_{\text{Tierra}} = 2.5 \times 10^{-24}\ \text{m/s}$$

Esto equivale a alrededor de 0.1 micrómetros dividido entre un tiempo igual a la vida del universo, demasiado pequeño para poder medirlo. También pudimos haber resuelto este problema usando la cantidad de movimiento combinada de la pelota y la Tierra.

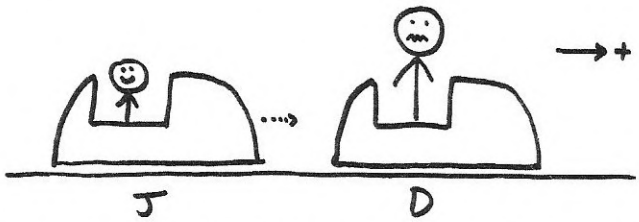
## 6.4 CHOQUES ELÁSTICOS

La cantidad de movimiento siempre se conserva, al igual que la energía. A veces la energía mecánica se convierte en otras formas de energía, como calor. Cuando esto ocurre, si bien sigue cumpliéndose la conservación de la energía, en general no es posible usarla para resolver el problema. Tal ha sido el caso en todos los ejemplos de este capítulo hasta el momento.

En ocasiones, en un choque la energía mecánica se conserva. Dado que el tiempo del impacto es demasiado breve para que la energía potencial cambie, esto significa que la energía cinética es la misma después del choque que antes, o que se "conserva" (no se trata de una verdadera ley de conservación). En tales casos hablamos de **choques elásticos**. Dos ejemplos son los choques entre bolas de billar y entre los "carritos chocones" de la feria.

### EJEMPLO

En un parque de diversiones, Juan (50 kg) y su papá, David (100 kg), van en sendos carritos chocones con masa de 100 kg cada uno. El carro de Juan se desplaza a 3.5 m/s y golpea por atrás al de su papá que se encontraba en reposo antes de la colisión. ¿Con qué rapidez se mueve cada uno después del choque?




Dado que se trata de un choque, intentemos con la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$P_x + \Delta P_x = P'_x$$

$$m_J v_J = m_D v_D + (0)t = m_J v'_J + m_D v'_D$$

Toda vez que sólo buscamos la cantidad de movimiento horizontal, podemos pasar por alto la gravedad y la fuerza normal ejercida por el piso. Las fuerzas que los carritos de Juan (J) y David (D) ejercen mutuamente se cancelan cuando sumamos las componentes del impulso.

No podemos resolver este problema, dado que hay dos incógnitas en la ecuación ($v'_J$ y $v'_D$). Necesitamos más información. Ésta es que se trata de un choque elástico, de manera que la energía cinética es la misma antes y después.

$$\frac{1}{2}m_J v_J^2 + \frac{1}{2}m_D v_D^2 = \frac{1}{2}m_J (v'_J)^2 + \frac{1}{2}m_D (v'_D)^2$$

Ahora tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, así que podemos resolver el problema. No se muestra toda el álgebra, pero el resultado es

$$v'_J = -0.5 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad v'_D = +3.0 \text{ m/s}$$

El carro de David es empujado al frente mientras que el de Juan sólo rebota retrocediendo un poco.

Dado que los choques elásticos son comunes, y dado que resolver ecuaciones simultáneas es un tanto engorroso (en especial cuando hay términos al cuadrado), los físicos hacen algo que rara vez repiten: encuentran el resultado y lo usan de nuevo cuando vuelve a necesitarse. Si el objeto 1 experimenta un choque elástico con el objeto 2, entonces sus velocidades después del mismo serán

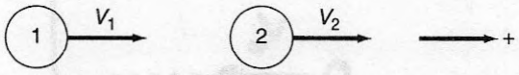
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

o, si el objeto 2 estaba estacionario antes del choque,

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{y} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Es posible utilizar estas ecuaciones para encontrar los resultados del ejemplo anterior. Para ello, el sentido positivo de cada objeto debe ser el mismo.

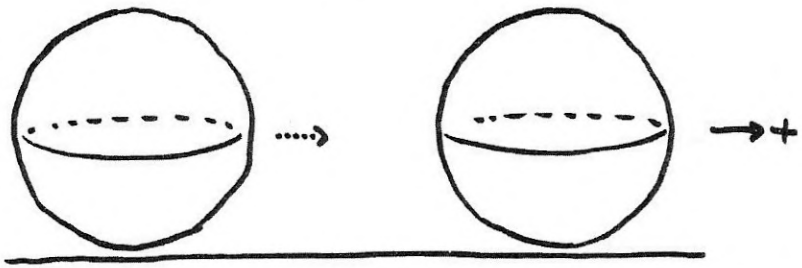



¿Cómo sabemos si un choque es elástico?

- Si el enunciado del problema dice que el choque es elástico, entonces el choque es elástico (de veras).
- Si los objetos quedan unidos, entonces el choque no es elástico.
- Si un objeto atraviesa el otro, el choque no es elástico.
- Si el problema puede resolverse usando solamente la conservación de la cantidad de movimiento, entonces no es necesario preocuparse por saber si el choque es elástico.
- Después de lo anterior, utilice su experiencia con los objetos en cuestión: ¿es probable que reboten entre sí (choque elástico) o es probable que parte de la energía se convierta en calor (choque inelástico)?

**EJEMPLO**

Una bola de billar que se mueve a 2.4 m/s golpea otra bola de frente. ¿Cuál es la velocidad de cada bola después del choque?



Los choques entre bolas de billar suelen ser elásticos. Dado que en el billar todas las bolas tienen la misma masa,

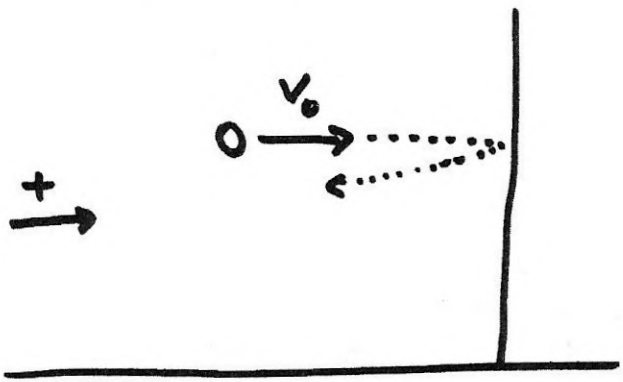
$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m - m}{m + m} v_1 = 0$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m}{m + m} v_1 = v_1 = 2.4 \text{ m/s}$$

Siempre que dos objetos con masa idéntica experimentan un choque elástico, intercambian velocidades. Si no chocan de lleno sino de manera sesgada, entonces necesitamos resolver un problema bidimensional en el que se separen las componentes en $x$ y $y$ de la cantidad de movimiento.

**EJEMPLO**

Una pelota de caucho rebota de manera elástica en una pared de ladrillo. ¿Cuál es la velocidad de cada objeto después del choque?




Dado que el choque es elástico (y unidimensional), utilizamos las fórmulas anteriores.

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

La masa de la pelota es mucho menor que la masa de la pared de ladrillo, de modo que podemos considerar que la primera es cero.

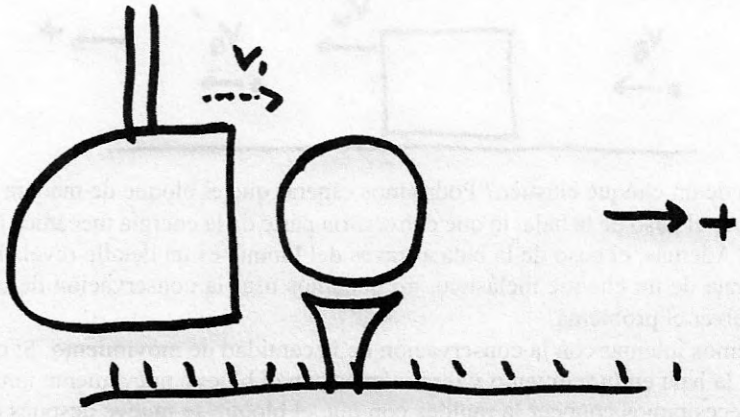
$$v_1' = \frac{-m_2}{m_2} v_1 \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{0}{m_2} v_1$$

$$v_1' = -v_1 \quad \text{y} \quad v_2' = 0$$

La pelota rebota con la misma rapidez mientras que la pared no se mueve. ¿Cómo decimos entonces que la cantidad de movimiento se conserva? La pared de ladrillo en realidad se mueve un poco, y nuestra respuesta es un resultado aproximado. Pero como en el caso anterior de la Tierra y la pelota, la rapidez de la Tierra es demasiado pequeña para poder medirla.

**EJEMPLO**

Una pelota de golf de 46 g es golpeada (de manera elástica) por un palo de golf de 500 g que se mueve a 40 m/s. ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de ser golpeada?




Una vez más, el choque es elástico (y unidimensional), así que usamos las fórmulas anteriores.

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2' = \frac{2(500\ \text{g})}{(46\ \text{g}) + (500\ \text{g})} (40\ \text{m/s})$$

$$v_2' = 73\ \text{m/s}$$

De manera sorprendente, la pelota se mueve más rápido de como lo hacía el palo de golf.

El choque de un palo de golf y una pelota no es completamente elástico. Los golfistas utilizan el coeficiente de restitución (CDR) para describir el grado de elasticidad del choque.

*LECCIÓN*

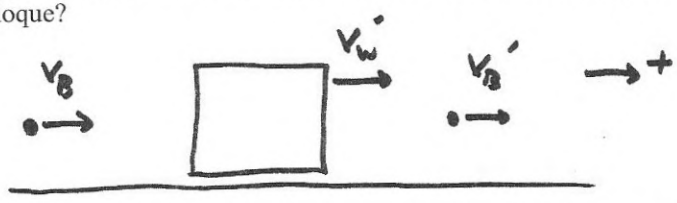
Si los objetos no quedan unidos, el choque podría ser elástico, en cuyo caso la energía cinética "se conserva".

## 6.5 APLICACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La conservación de la cantidad de movimiento pasa por alto la interacción entre dos objetos y es útil para analizar procesos de choque.

**EJEMPLO**

Una bala de 4.0 g que se mueve a 460 m/s golpea un bloque de madera de 410 g. La bala sale por el otro lado con una rapidez de 214 m/s. El bloque de madera se desliza sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción de 0.42. ¿Qué distancia se desliza el bloque?




¿Se trata de un choque elástico? Podríamos esperar que el bloque de madera resultara dañado por el paso de la bala, lo que convertiría parte de la energía mecánica (cinética) en calor. Además, el paso de la bala a través del bloque es un detalle revelador. Dado que se trata de un choque inelástico, no podemos usar la conservación de la energía para resolver el problema.

Podemos intentar con la conservación de la cantidad de movimiento. Si comenzamos con la bala en movimiento y terminamos con el bloque nuevamente inmóvil, entonces necesitamos conocer la rapidez con que el bloque se mueve después de que la bala lo empuja (venciendo la fricción). Lo que podemos encontrar, usando la conservación de la cantidad de movimiento, es la rapidez del bloque de madera inmediatamente después de que la bala lo ha atravesado. Entonces podríamos usar fuerzas y aceleración constante, o conservación de la energía, para calcular cuánto se desliza el bloque de madera.

Utilicemos la conservación de la cantidad de movimiento para encontrar la rapidez del bloque de madera. (En las ecuaciones siguientes el subíndice B se refiere a la bala y el subíndice W al bloque de madera.)

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$(m_B v_B + m_W v_W) + (F_{\text{B sobre W}} - F_{\text{W sobre B}})t = (m_B v_B' + m_W v_W')$$

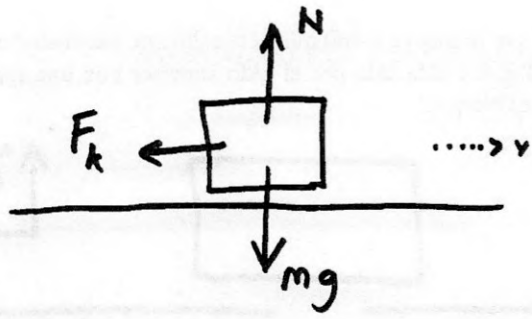
$$[m_B v_B + m_W(0)] + (0)t = (m_B v_B' + m_W v_W')$$

$$m_W v_W' = m_B v_B - m_B v_B'$$

$$v_W' = \frac{m_B(v_B - v_B')}{m_W}$$

$$v'_{\mathrm{W}} = \frac{(4.0\ \mathrm{g})}{(410\ \mathrm{g})}\,[(460\ \mathrm{m/s}) - (214\ \mathrm{m/s})]$$

$$v'_{\mathrm{W}} = 2.4\ \mathrm{m/s}$$




¿Cuánto se desliza el bloque? Podemos usar fuerzas:

$$F = ma$$
$$-F_{\mathrm{k}} = ma_x$$
$$F_{\mathrm{k}} = \mu N$$
$$+N - mg = ma_y = 0$$
$$N = mg$$
$$F_{\mathrm{k}} = \mu mg$$
$$-\mu mg = ma_x$$
$$a_x = -\mu g$$
$$v^2 - v_0^2 = 2a(\Delta x)$$
$$(0)^2 - (2.4\ \mathrm{m/s})^2 = 2[-(0.42)(9.8\ \mathrm{m/s^2})](d)$$
$$d = 0.70\ \mathrm{m} \quad \text{o} \quad 70\ \mathrm{cm}$$

También es posible emplear la conservación de la energía:

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}m(v_0)^2 + mgh + (-\mu Nd) = \frac{1}{2}m(0)^2 + mgh$$

$$\frac{1}{2}m(v_0)^2 - \mu mgd = 0$$

$$d = \frac{(v_0)^2}{2\mu g}$$

$$d = \frac{(2.4\ \mathrm{m/s})^2}{2(0.42)(9.8\ \mathrm{m/s^2})}$$

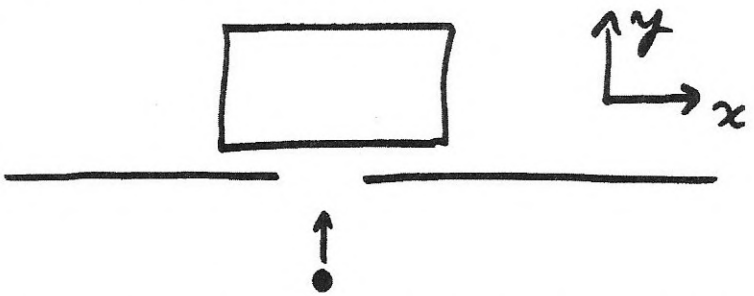
$$d = 0.70\ \mathrm{m}$$

*LECCIÓN*

La conservación de la cantidad de movimiento es una herramienta, una técnica que puede usarse junto con otras técnicas para resolver problemas.

**EJEMPLO**

Una bala de 4.0 g que se mueve a 460 m/s verticalmente hacia arriba golpea un bloque de madera de 410 g. La bala sale por el lado superior con una rapidez de 214 m/s. ¿Cuánto asciende el bloque?




Como en el ejemplo anterior, podemos usar la cantidad de movimiento para encontrar la rapidez del bloque inmediatamente después de que lo atraviesa la bala y luego recurrir a otra técnica para calcular la distancia que recorre.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$(m_B v_B + m_W v_W) + [F_{B\text{ sobre }W} - F_{W\text{ sobre }B} - (m_B + m_W)g]t = (m_B v'_B + m_W v'_W)$$

Las fuerzas que la bala y la madera se aplican mutuamente se cancelan y $v_W$ es cero.

$$m_B v_B + [-(m_B + m_W)g]t = (m_B v'_B + m_W v'_W)$$

El lapso del choque es muy breve,

$$t \approx (\text{altura del bloque})/v \approx (1\text{ m})/(330\text{ m/s}) \approx 0.3\text{ s}$$

Es poco probable que un bloque de madera de 410 g tenga más de 1 m de alto. El cambio fraccionario en la cantidad de movimiento debido a la gravedad durante el choque es

$$\frac{(mg)(t)}{m_B v_B} \approx \frac{(4\text{ N})(3 \times 10^{-4}\text{ s})}{(4.0 \times 10^{-3}\text{ kg})(460\text{ m/s})} \approx 6.5 \times 10^{-4} \quad \text{o} \quad 0.07\%$$

El impulso (cambio en la cantidad de movimiento) debido a la gravedad durante el choque es tan pequeño que lo despreciaremos.

$$m_B v_B = m_B v'_B + m_W v'_W$$

$$v'_W = m_B(v_B - v'_B)/m_W$$

$$v'_W = (4.0\text{ g})[(460\text{ m/s}) - (214\text{ m/s})]/(410\text{ g})$$

$$v'_W = 2.4\text{ m/s}$$

¿Qué altura alcanza el bloque? Podemos usar la aceleración constante:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x$$

$$(0)^2 - (2.4\text{ m/s})^2 = 2(-9.8\text{ m/s}^2)h$$

$$h = \frac{(2.4\text{ m/s})^2}{2(9.8\text{ m/s}^2)}$$

$$h = 0.29\text{ m} \quad \text{o} \quad 29\text{ cm}$$

También podríamos utilizar la conservación de la energía:

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}m(v_0)^2 + mg(0) + (0) = \frac{1}{2}m(0)^2 + mgh$$

$$h = \frac{(v_0)^2}{2g}$$

$$h = \frac{(2.4\text{ m/s})^2}{2(9.8\text{ m/s}^2)}$$

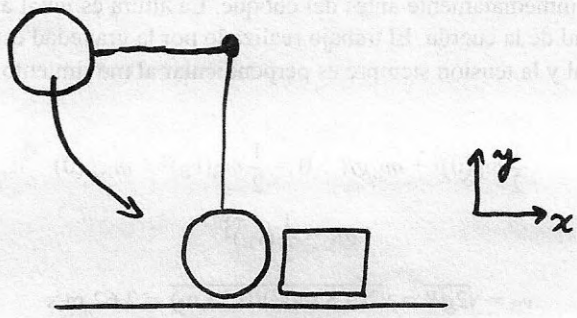
$$h = 0.29\text{ m}$$

*LECCIÓN*

Los tiempos de choque suelen ser lo suficientemente breves para poder pasar por alto otras fuerzas que actúan durante el mismo.

**EJEMPLO**

Una bola de 0.85 kg suspendida de una cuerda de 35 cm de largo cae y golpea un bloque de plastilina de 0.56 kg. El bloque queda unido a la bola. ¿Cuál es la rapidez de la plastilina luego del choque?



Hemos usado la conservación de la cantidad de movimiento para analizar muchos choques en este capítulo, así que tal vez el lector quiera usarla de nuevo.

$$\boldsymbol{P} + \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'$$

$$(m_B v_B + m_P v_P) + (F_{\text{bola sobre plastilina}} - F_{\text{plastilina sobre bola}})t = (m_B v'_B + m_P v'_P)$$

En este caso pasamos por alto cualquier fricción horizontal entre la plastilina y el piso durante el choque (el tiempo del impacto es breve, de modo que el impulso debido a la fricción *durante* el choque es muy pequeño, como la gravedad en el ejemplo anterior). Las fuerzas que la bola y la plastilina ejercen mutuamente se cancelan (por eso usamos la cantidad de movimiento en los choques), $v_P = 0$, y $v'_B = v'_P$.

$$m_B v_B = (m_B + m_P)\, v'_P$$

Conocemos las masas, así que para encontrar $v'_P$ necesitamos conocer $v_B$.

¿Podemos usar la conservación de la cantidad de movimiento para encontrar $v_B$, la rapidez horizontal de la bola inmediatamente antes del choque? Las fuerzas que actúan sobre la bola son la gravedad y la tensión de la cuerda. La gravedad siempre es vertical y estamos usando la componente horizontal de la cantidad de movimiento, así que podemos pasar por alto la gravedad. La fuerza de tensión cambia no sólo de sentido, sino también de magnitud cuando la bola desciende. Si conociéramos esta fuerza de tensión en todo momento durante el proceso, podríamos integrarla (¡nooo!) para encontrar el impulso horizontal transferido de la cuerda a la bola. Esto sería horrible. De manera alternativa, el otro extremo de la cuerda está unido a la Tierra, de modo que si conociéramos la rapidez con que ésta se mueve hacia la izquierda luego de que la bola cae, podríamos usar la cantidad de movimiento para encontrar la rapidez de la bola inmediatamente antes del choque. Pero esa rapidez es demasiado pequeña para poder medirla. La conservación de la cantidad de movimiento no es útil en este caso; necesitamos intentar otra cosa.

La aceleración de la bola no es constante, y no conocemos (ni nos interesan) ésta ni el tiempo implicado. Suena como las características de un problema que puede resolverse empleando la conservación de la energía.

$$EK_{\text{antes}} + EP_{\text{antes}} + W = EK_{\text{después}} + EP_{\text{después}}$$

$$\frac{1}{2}m_B(0)^2 + m_B g h + W = \frac{1}{2}m_B(v)^2 + m_B g(0)$$

La velocidad $v$ de la bola cuando llega al extremo de su oscilación de un cuarto de ciclo es su velocidad inmediatamente antes del choque. La altura es igual al radio del arco, que es la longitud de la cuerda. El trabajo realizado por la gravedad está incluido en la energía potencial y la tensión siempre es perpendicular al movimiento, así que no realiza trabajo.

$$\frac{1}{2}m_B(0)^2 + m_B g R + 0 = \frac{1}{2}m_B(v_B)^2 + m_B g(0)$$

$$gR = \frac{1}{2}(v_B)^2$$

$$v_B = \sqrt{2gR} = \sqrt{2(9.8\ \text{m/s}^2)(0.35\ \text{m})} = 2.62\ \text{m/s}$$

Ahora podemos calcular la rapidez de la plastilina (y de la bola) después del choque.

$$m_B v_B = (m_B + m_P) v'_P$$

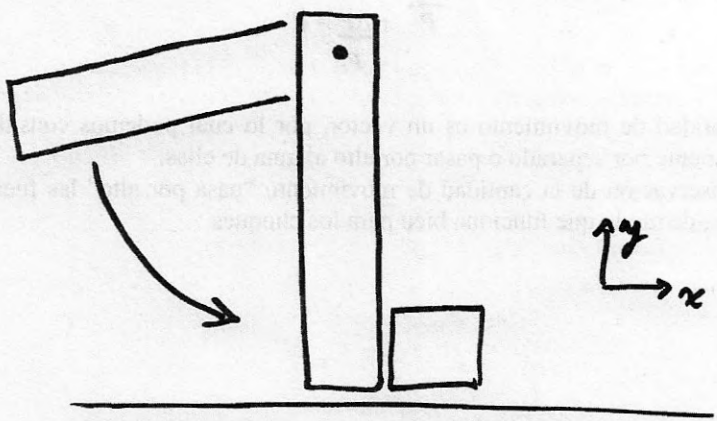
$$v'_P = \frac{m_B v_B}{m_B + m_P}$$

$$v'_P = \frac{0.85\ \text{kg}}{0.85\ \text{kg} + 0.56\ \text{kg}} (2.62\ \text{m/s})$$

$$v'_P = 1.58\ \text{m/s}$$

**EJEMPLO**

El extremo de una barra uniforme de 0.85 kg y 35 cm de largo cae girando sobre el pivote en uno de sus extremos y golpea un bloque de plastilina de 0.56 kg. El bloque queda unido al extremo de la barra. ¿Cuál es la rapidez de la plastilina después de ser golpeada por la barra?




Este problema suena y luce notablemente similar al anterior, así que trataremos de resolverlo utilizando las técnicas que funcionaron tan bien. Emplearemos la conservación de la energía para encontrar la rapidez de la barra en el momento del choque, para luego usar la conservación de la cantidad de movimiento a fin de encontrar la rapidez de la plastilina después del choque.

La dificultad en el primer paso es que no toda la longitud de la barra se mueve con la misma rapidez. Ni siquiera podemos usar la rapidez del centro de masa, porque la energía cinética es proporcional a $v^2$ y no es lineal. Nos gustaría usar la conservación de la energía para este paso, pero necesitamos saber cómo encontrar la energía cinética de un objeto que está girando (véase el siguiente capítulo).

Incluso si pudiéramos resolver el primer paso, tendríamos otra dificultad. Durante el choque, el pivote del otro extremo de la barra ejercerá una fuerza para mantener ese extremo de la barra en su lugar. Antes pasamos por alto otras fuerzas como ésta porque el tiempo del impacto era breve. Eso no se aplica en este caso debido a que a menor

tiempo del impacto, mayor fuerza ejercida por el pivote. El producto de ambas, que es el impulso aplicado a la barra, será constante. A menos que conozcamos el impulso, no podremos resolver el segundo paso utilizando la conservación de la cantidad de movimiento. Para ello tendremos que usar la conservación de la cantidad de movimiento angular (en el siguiente capítulo).

*LECCIÓN*

Cuando hay una restricción al movimiento (como un pivote o una bisagra), la fuerza que ésta ejerce durante un choque es demasiado grande para ignorarla. La conservación de la cantidad de movimiento no es útil en tales problemas.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- La cantidad de movimiento se conserva, de modo que

$$\overbrace{\boldsymbol{P}}^{m\boldsymbol{v}} + \underbrace{\Delta \boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{F}_t} = \boldsymbol{P}'$$

- La cantidad de movimiento es un vector, por lo cual podemos considerar cada componente por separado o pasar por alto alguna de ellas.
- La conservación de la cantidad de movimiento "pasa por alto" las fuerzas entre objetos, de modo que funciona bien para los choques.

CAPÍTULO 7

# ROTACIÓN

Algunas veces los objetos se desplazan, pero otras veces giran (y los muy talentosos pueden hacer ambas cosas al mismo tiempo). Todo lo que hemos hecho hasta el momento también se aplica a la rotación, con las mismas ecuaciones pero con diferentes variables.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | → | $\theta$ (teta) | desplazamiento angular |
| $v$ | → | $\omega$ (omega) | velocidad angular |
| $a$ | → | $\alpha$ (alfa) | aceleración angular |
| $m$ | → | $I$ | masa angular = momento de inercia |
| $F$ | → | $\tau$ (tau) | fuerza angular = momento de torsión |
| $P$ | → | $L$ | cantidad de movimiento angular |

Cada ecuación que hemos considerado tiene también un equivalente angular. Por ejemplo, la fuerza es igual a masa por aceleración ($F = ma$), de modo que la fuerza angular es igual a masa angular por aceleración angular ($\tau = I\alpha$).

## 7.1 ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

Un objeto puede tener velocidad, que es el cambio en su posición. Puede tener aceleración, que es la celeridad con que cambia su velocidad. Puede tener aceleración aunque su velocidad sea cero, por ejemplo, lance algo (que no sea este libro) hacia arriba y en el instante en que se encuentra a su altura máxima la velocidad es cero pero está cambiando, así que hay una aceleración. Ya hemos visto todo esto antes.

Y todo se cumple también para la rotación. Un objeto puede tener velocidad angular, que es el cambio en su posición o desplazamiento angular (cuán rápido gira). Puede tener aceleración angular, que es la celeridad con que cambia la velocidad angular (¿aumenta o disminuye la rapidez de rotación?). Asimismo, puede tener aceleración angular aunque la velocidad angular sea cero. Haga rodar un balón de basquetbol u otro objeto redondo rampa arriba; en el momento de su ascenso máximo la velocidad angular es cero pero está cambiando, pues pasará de girar en un sentido a dejar de girar y de aquí a girar en el otro sentido. Se trata de una aceleración angular.

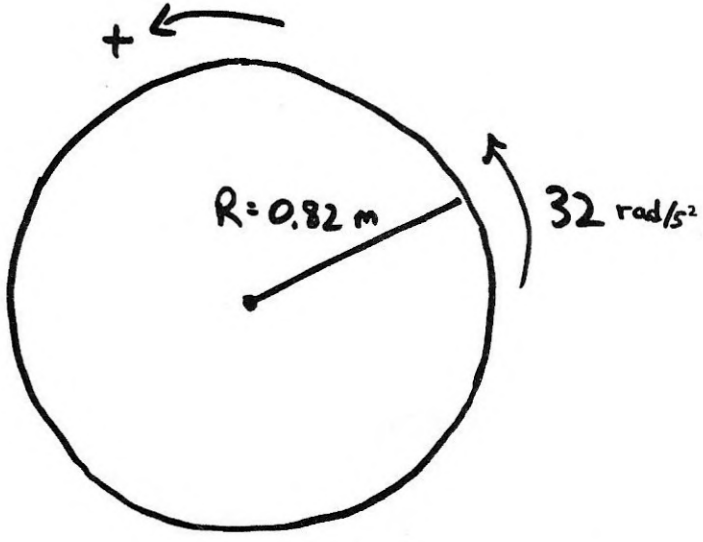
En el caso de la aceleración constante pudimos resolver varios problemas con un número reducido de ecuaciones sencillas. También pudimos resolver problemas en los cuales la aceleración no era constante, pero esto fue más difícil. Todas las ecuaciones que utilizamos para la aceleración constante funcionan también para la aceleración angular constante: sólo se sustituye la variable por su equivalente angular.

$$v - v_0 = at \quad \rightarrow \quad \omega - \omega_0 = \alpha t$$
$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\Delta x = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$
$$v^2 - v_0^2 = 2a\,\Delta x \quad \rightarrow \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,\Delta\theta$$

Los ángulos se miden en radianes. ¿Qué es un radián? Lo definiremos más adelante. Por el momento, digamos que $2\pi$ de ellos forman un círculo, ciclo o revolución.

**EJEMPLO**

Una rueda con diámetro de 0.82 m gira sobre su centro con velocidad angular de 32 rad/s. ¿Qué aceleración angular se necesita para detenerlo en 0.5 s?




Abordamos este caso del mismo modo en que lo hicimos con la aceleración constante:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $\rightarrow$ | $\Delta\theta$ | = | |
| $v_0$ | $\rightarrow$ | $\omega_0$ | = | 32 rad/s |
| $v$ | $\rightarrow$ | $\omega$ | = | 0 |
| $a$ | $\rightarrow$ | $\alpha$ | = | ? |
| $t$ | $\rightarrow$ | $t$ | = | 5.0 s |

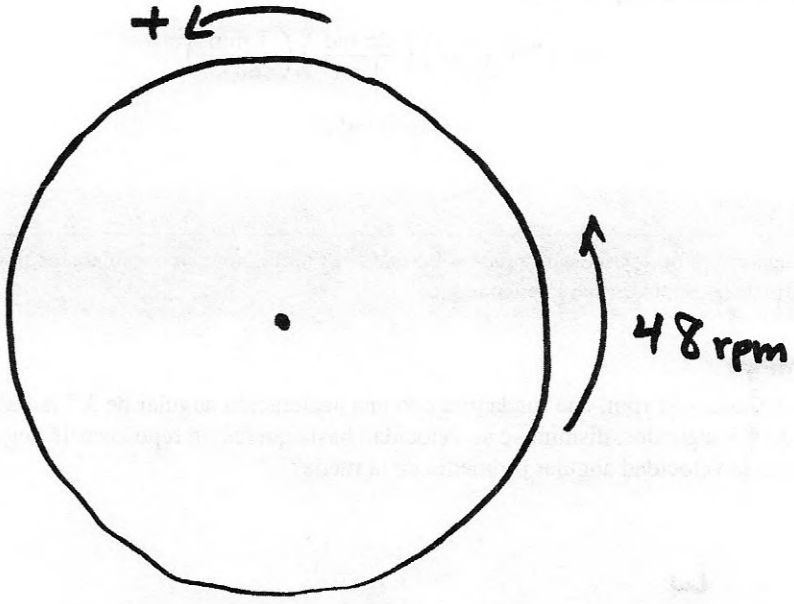
No nos interesa el desplazamiento angular, así que elegimos

$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$
$$\alpha = (\omega - \omega_0)/t$$
$$\alpha = [(0) - (32 \text{ rad/s})]/(5.0 \text{ s})$$
$$\alpha = -6.4 \text{ rad/s}^2$$

La aceleración angular es negativa. Dado que la rotación de la rueda disminuye, la velocidad angular $\omega$ y la aceleración angular $\alpha$ deben tener sentidos opuestos, uno positivo y el otro negativo.

**EJEMPLO**

Una tornamesa que parte del reposo gira 5 veces mientras acelera a 48 rpm (rotaciones por minuto). ¿Cuál es la aceleración angular de la tornamesa?




Utilizamos nuestra técnica de aceleración constante:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $\rightarrow$ | $\Delta\theta$ | = | 5 rotaciones |
| $v_0$ | $\rightarrow$ | $\omega_0$ | = | 0 |
| $v$ | $\rightarrow$ | $\omega$ | = | 48 rot/min |
| $a$ | $\rightarrow$ | $\alpha$ | = | ? |
| $t$ | $\rightarrow$ | $t$ | = | |

No nos interesa el tiempo, de modo que escogemos:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,\Delta\theta$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\,\Delta\theta}$$

$$\alpha = \frac{(48 \text{ rot/min})^2 - (0)^2}{2(5 \text{ rot})}$$

$$\alpha = 230 \text{ rot/min}^2$$

Cada minuto la velocidad angular aumenta (se hace más positiva) en 230 rotaciones por minuto.

Usualmente la aceleración angular se da en radianes/segundo$^2$. A veces es necesario usar radianes; esto se explicará en la siguiente sección. Realizaremos la conversión (principalmente para practicar).

$$\alpha = \left(230 \frac{\text{rot}}{\text{min}^2}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rot}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)^2$$

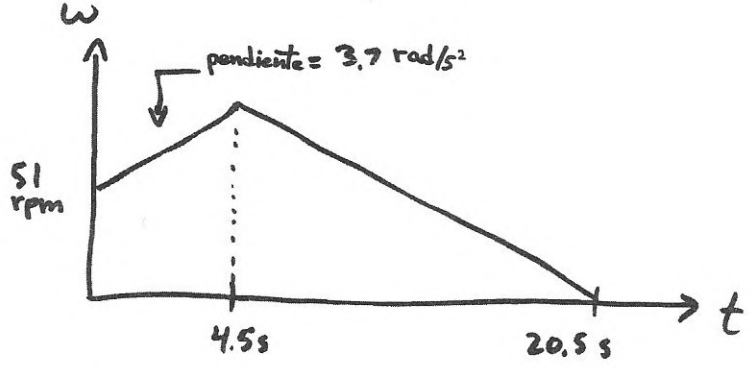
$$\alpha = 0.40 \text{ rad/s}^2$$

*LECCIÓN*

No siempre es necesario usar radianes. Lo que sí es necesario, como siempre, es llevar el control de las unidades que se están usando.

**EJEMPLO**

Comenzando a 51 rpm, una rueda gira con una aceleración angular de 3.7 rad/s$^2$. Después de 4.5 segundos, disminuye su velocidad hasta quedar en reposo en 16 segundos. ¿Cuál es la velocidad angular promedio de la rueda?




Este problema incluye dos aceleraciones angulares distintas, una positiva y otra negativa. Dado que las aceleraciones son diferentes, pero cada tramo tiene aceleración constante (constante en tramos), podemos resolver cada parte usando técnicas de aceleración angular constante.

Antes de hacerlo, analicemos qué estamos tratando de encontrar. Deseamos la velocidad angular promedio. Si pudiéramos encontrar la velocidad angular promedio para cada parte, ¿la velocidad angular promedio buscada sería el promedio de las dos? No necesariamente, porque el tiempo de cada parte del problema es distinto. En cambio, la velocidad angular promedio es

$$\omega_{\text{prom}} = \frac{\Delta\theta}{t} = \frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{t_1 + t_2}$$

Necesitamos encontrar cuánto gira la rueda en cada parte del problema, sumar para encontrar el desplazamiento angular total (o la distancia, dado que la rueda siempre gira en la misma dirección) y dividir entre el tiempo total.

Para la primera parte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $\rightarrow$ | $\Delta\theta$ | = | ? |
| $v_0$ | $\rightarrow$ | $\omega_0$ | = | 51 rpm |
| $v$ | $\rightarrow$ | $\omega$ | = | |
| $a$ | $\rightarrow$ | $\alpha$ | = | 3.7 rad/s$^2$ |
| $t$ | $\rightarrow$ | $t$ | = | 4.5 s |

No nos interesa la velocidad angular final, así que usamos

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Delta\theta_1 = \left[(51 \text{ rot/min})\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rot}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)\right](4.5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.7 \text{ rad/s}^2)(4.5 \text{ s})^2$$

$$\Delta\theta_1 = (5.34 \text{ rad/s})(4.5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.7 \text{ rad/s}^2)(4.5 \text{ s})^2$$

$$\Delta\theta_1 = 61.5 \text{ rad}$$

Para la segunda parte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $\rightarrow$ | $\Delta\theta$ | = | ? |
| $v_0$ | $\rightarrow$ | $\omega_0$ | = | $\omega_1$ |
| $v$ | $\rightarrow$ | $\omega$ | = | 0 |
| $a$ | $\rightarrow$ | $\alpha$ | = | |
| $t$ | $\rightarrow$ | $t$ | = | 16 s |

Necesitamos hallar la velocidad angular al final de la primera parte y usarla como la velocidad angular inicial de la segunda parte.

$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = (5.34 \text{ rad/s}) + (3.7 \text{ rad/s}^2)(4.5 \text{ s})$$

$$\omega = 22.0 \text{ rad/s}$$

No nos interesa la aceleración angular durante la segunda parte, así que usamos

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$

$$\Delta\theta_2 = \frac{(22.0 \text{ rad/s}) + (0)}{2}(16 \text{ s})$$

$$\Delta\theta_2 = 176 \text{ rad}$$

La velocidad angular promedio es

$$\omega_{\text{prom}} = \frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{t_1 + t_2}$$

$$\omega_{\text{prom}} = \frac{(61.5 \text{ rad}) + (176 \text{ rad})}{(4.5 \text{ s}) + (16 \text{ s})}$$

$$\omega_{\text{prom}} = 11.6 \text{ rad/s}$$

*LECCIÓN*

Resuelva los problemas de aceleración angular constante del mismo modo que los problemas de aceleración lineal constante: escriba los cinco símbolos e identifique tres de ellos.

## 7.2 RELACIÓN ENTRE MOVIMIENTO ANGULAR Y MOVIMIENTO LINEAL

A veces necesitamos relacionar el movimiento angular con el movimiento lineal. Imagine por ejemplo que ponemos una pequeña gota de pintura en la rueda antes de que comience a girar. Podríamos preguntarnos entonces: "¿Con qué rapidez se mueve la gota de pintura?" Advierta que la velocidad de la pintura cambia de manera constante, porque la dirección cambia, pero si la velocidad angular es constante entonces la rapidez de la gota de pintura también es constante.

Cuanto más lejos del centro (el eje de la rueda) esté la pintura, tanto mayor distancia debe recorrer en cada rotación, y tanto más rápido esperamos que se mueva. Dado que la distancia cubierta es $2\pi R$ para cada rotación, la rapidez es

$$v = 2\pi R \times (\text{rotaciones por segundo})$$

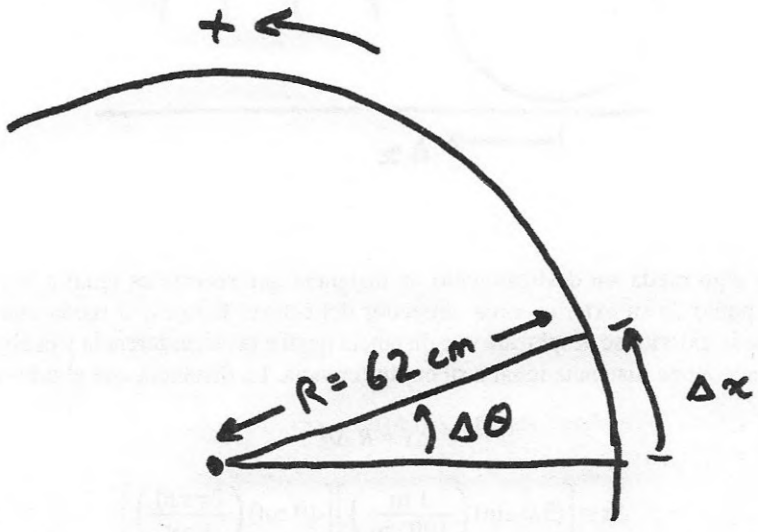
Eligiendo $2\pi$ radianes por rotación como las unidades para los ángulos, la ecuación pasa a ser

$$\Delta x = R\,\Delta\theta$$
$$v = R\omega$$
$$a = R\alpha$$

Si hubiéramos elegido otra unidad para medir los ángulos, las fórmulas anteriores necesitarían incluir una constante adicional; utilizando radianes obtenemos fórmulas elegantes y sencillas. Esto significa que *debemos* usar radianes siempre que apliquemos las fórmulas anteriores. A veces empleamos alguna de ellas sin advertirlo, así que la regla general es utilizar radianes siempre que en un problema interviene una longitud; cualquier longitud.

**EJEMPLO**

En el ejemplo anterior ("Comenzando a 51 rpm, una rueda gira..."), ¿cuál es la rapidez promedio de un punto situado en la parte exterior de la rueda? El radio de la rueda es de 62 cm.




La rapidez de un punto en el exterior es

$$v = R\omega$$

de modo que la rapidez promedio es la distancia hasta el centro multiplicada por la rapidez angular.

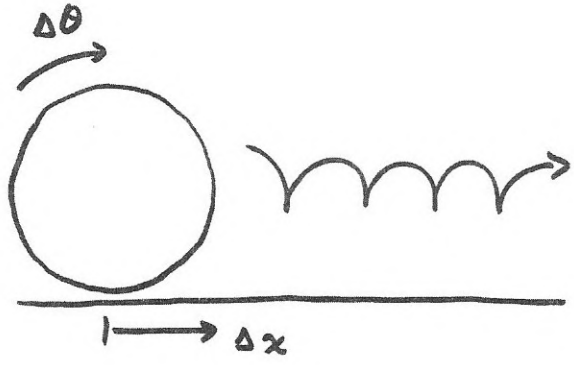
$$v = \left[(62\text{ cm})\left(\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}\right)\right](11.6\text{ rad/s})$$

$$v = 7.2\text{ m/s}$$

¿Qué sucedió con los radianes? ¿Acaso (m) por (rad/s) no debería ser igual a (m rad/s)? Los radianes no son realmente unidades, así que podemos incluirlos cuando nos conviene y pasarlos por alto en caso contrario. Decir que un ángulo es de "0.14" es lo mismo que decir que es de "0.14 radianes". No podemos hacer lo mismo con rotaciones, grados o cualesquiera otras unidades.

**EJEMPLO**

Un tubo de 6.0 cm de diámetro rueda sin deslizamiento nueve veces sobre una superficie horizontal. ¿Qué distancia recorre?




Cuando algo rueda sin deslizamiento, la distancia que recorre es igual a la distancia que un punto de su exterior viaja alrededor del centro. Esto es, si rueda una vez, un punto de su exterior se desplazará una distancia igual a la circunferencia y el objeto mismo avanzará una distancia igual a su circunferencia. La distancia que el tubo rueda es

$$\Delta x = R\,\Delta\theta$$

$$\Delta x = \left[(3.0\text{ cm})\left(\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}\right)\right]\left[(9\text{ rot})\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rot}}\right)\right]$$

$$\Delta x = 1.7\text{ m}$$

Una vez más, los radianes desaparecen y nos queda una cantidad lineal.

*LECCIÓN*

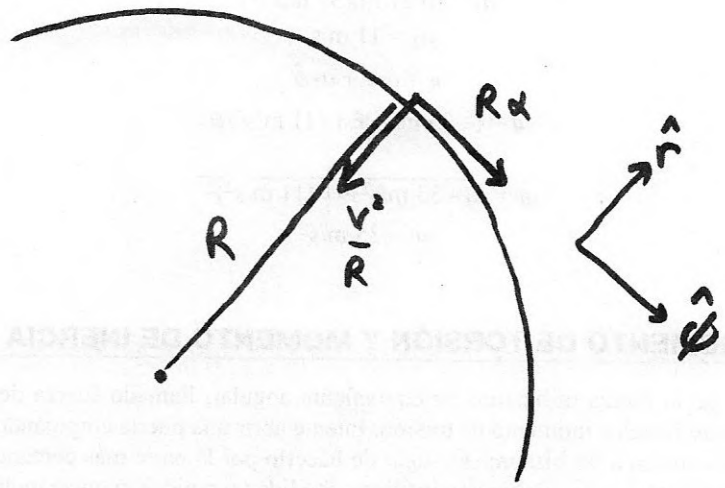
Utilice radianes siempre que haya una longitud en el problema, cualquier longitud.

**EJEMPLO**

Una rueda con 42 cm de diámetro está girando con una rapidez angular de 120 rpm. Experimenta una desaceleración angular de 52 rad/s$^2$. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración (lineal) de un punto situado en el borde de la rueda?

Hay dos ecuaciones para la aceleración que podríamos usar.

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a = R\alpha$$




La primera es la aceleración dirigida hacia el centro de un objeto que se mueve en círculo. Dado que la dirección de la velocidad de nuestra "gota de pintura" está cambiando, debe estar acelerándose; esta aceleración está dirigida hacia el centro de una trayectoria circular y es igual a $v^2/R$.

La segunda es la aceleración que hace que la gota de pintura se mueva más rápido. A medida que la rueda gira cada vez más rápido, la gota de pintura hace lo mismo. Esta aceleración, en la misma dirección que el movimiento, hace que la gota de pintura aumente su rapidez en el mismo sentido que la velocidad y es $a = R\alpha$.

La aceleración es

$$\boldsymbol{a} = a_R\hat{\boldsymbol{r}} + a_T\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{con} \quad a_R = -\frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_T = R\alpha$$

donde $\hat{\boldsymbol{r}}$ es el vector unitario con la dirección y el sentido de un radio que parte del centro y $\phi$ es el vector unitario con dirección tangencial al círculo, perpendicular a $\hat{\boldsymbol{r}}$.

$$a_R = -\frac{v^2}{R}$$

$$a_R = -\frac{(R\omega)^2}{R}$$

$$a_R = -R\omega^2$$

$$a_R = -\left[(21\text{ cm})\left(\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}\right)\right]\left[(120\text{ rot/min})\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rot}}\right)\left(\frac{1\text{ m}}{60\text{ cm}}\right)\right]^2$$

$$a_R = -33\text{ m/s}^2$$

$$a_T = R\alpha$$

$$a_T = (0.21 \text{ m})(52 \text{ rad/s}^2)$$
$$a_T = 11 \text{ m/s}^2$$
$$\boldsymbol{a} = a_R\hat{\boldsymbol{r}} + a_T\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
$$\boldsymbol{a} = (-33 \text{ m/s}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + (11 \text{ m/s}^2)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-33 \text{ m/s}^2)^2 + (11 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$|\boldsymbol{a}| = 35 \text{ m/s}^2$$

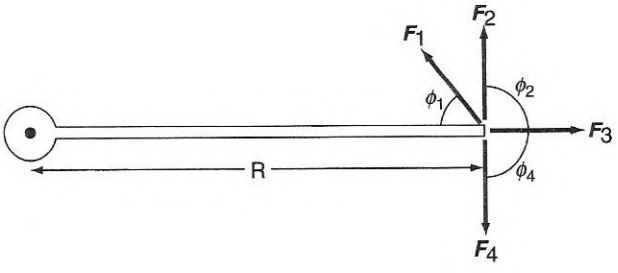
## 7.3 MOMENTO DE TORSIÓN Y MOMENTO DE INERCIA

En lugar de la fuerza utilizamos su equivalente angular, llamado fuerza de torsión, momento de fuerza o momento de torsión. Intente abrir una puerta empujándola por la parte más cercana a las bisagras en lugar de hacerlo por la parte más cercana al picaporte. Observará que no se abre con la misma facilidad o rapidez, o quizá incluso no se abre en absoluto. Cuanto más lejos del punto de apoyo se aplique la fuerza, tanto mayor será el momento de torsión.

El momento de torsión que una fuerza crea es igual a la fuerza por el brazo de momento por el seno del ángulo entre ellos:

$$\tau = FR \text{ sen } \phi$$

El "brazo de momento" es la línea que va del punto de apoyo al sitio donde se aplica la fuerza. Si la fuerza es paralela o antiparalela al brazo de momento, no hace girar el objeto y el momento de torsión es cero. Algunos autores usan $\theta$ para representar el ángulo entre la fuerza y el brazo de momento, pero nosotros utilizaremos $\phi$ (la letra griega fi), dado que $\theta$ ya se empleó en este capítulo.

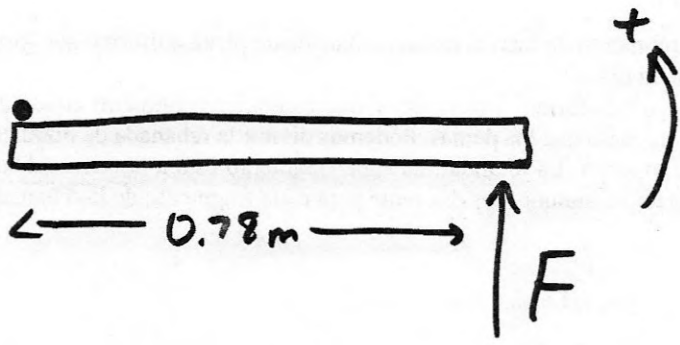



Los momentos de torsión pueden ser positivos o negativos. Como en el caso de la velocidad y la aceleración, acostumbramos elegir cuál es el sentido positivo; un momento de torsión negativo es el que tiene el sentido opuesto. Una vez que elegimos cuál es el sentido positivo, necesitamos apegarnos a él durante todo el problema. En el caso del mo-

vimiento giratorio, los físicos suelen elegir como positivo el sentido contrario al de las manecillas del reloj, pero no es obligatorio. Si aceptamos esa convención, diríamos que en la figura anterior $\boldsymbol{F}_4$ produce un momento de torsión en el sentido negativo.

**EJEMPLO**

Al salir de la tienda, un niño empuja el picaporte de la puerta con una fuerza de 18 N. La puerta tiene 0.78 m de ancho y su masa es de 7.2 kg. El niño empuja de manera perpendicular a la superficie de la puerta. ¿Cuál es el momento de torsión que aplicó a la puerta?




El momento de torsión es

$$\tau = FR \text{ sen } \phi$$
$$\tau = (18 \text{ N})(0.78 \text{ m}) \text{ sen } 90^\circ$$
$$\tau = (18 \text{ N})(0.78 \text{ m})(1)$$
$$\tau = 14 \text{ N m}$$

En el capítulo sobre energía aprendimos que un newton por un metro es igual a un joule. Dado que trabajo y momento de torsión son ambos el producto de una fuerza por una distancia, tienen las mismas unidades. A pesar de esto, nunca diríamos que el momento de torsión es de "14 joules", sino más bien de "14 newtons metro", aunque ambas expresiones son equivalentes. Debe tenerse cuidado de escribir N m y no mN, porque mN es un milinewton, o sea, una fuerza de una milésima de newton.

En el ejemplo anterior, ¿cómo influye en la respuesta la masa de la puerta? El momento de torsión que el niño aplica es el mismo sin importar la masa de la puerta. Cuanto más masiva es la puerta, tanto más inercia tiene y más lento se abre, pero el momento de torsión es el mismo.

Del mismo modo en que la segunda ley de Newton establece que $F = ma$, la misma ecuación es válida con los equivalentes angulares: $\tau = I\alpha$, o la fuerza angular es igual a la masa angular por la aceleración angular. La masa angular recibe el nombre de "mo-

mento de inercia", una combinación del brazo de momento y la inercia. El momento de inercia es igual a

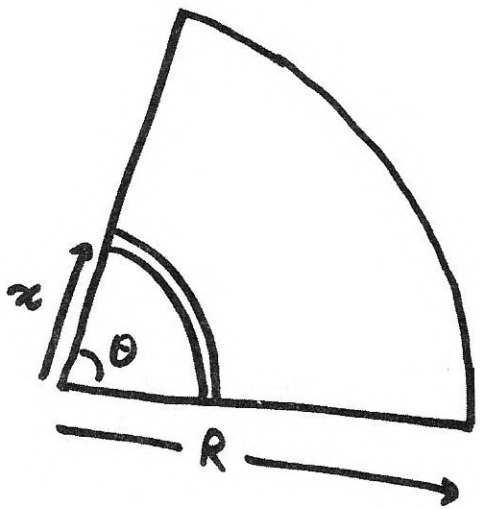
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Dividimos el objeto en fragmentos diminutos y luego para cada fragmento multiplicamos su masa por el cuadrado de su distancia al centro de rotación, y después sumamos todos estos productos. Necesitamos usar un gran número de fragmentos diminutos de modo que cada uno de ellos esté a la misma distancia del centro de rotación.

**EJEMPLO***

¿Cuál es el momento de inercia de una rebanada de pizza uniforme que gira alrededor del centro de la pizza?

El adjetivo "uniforme" quiere decir que cualquier centímetro cuadrado de pizza tiene la misma masa que los demás. Podemos dividir la rebanada de pizza en fragmentos como se muestra. La totalidad de cada fragmento está a la misma distancia $x$ del centro de rotación, aunque $x$ es diferente para cada fragmento de la rebanada.




El momento de inercia es

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

La distancia de cada fragmento al centro de rotación $r$ es $x$. La masa de cada fragmento es

$$\frac{\text{área de ese fragmento}}{\text{área de la rebanada completa}} \text{ (masa de la rebanada completa)}$$

$$I = \sum_i \left(\frac{A_i}{A} M\right) x_i^2$$

Cada fragmento es un pequeño rectángulo (curvo) cuya altura aumenta con $x$. La anchura de cada fragmento es la distancia entre los fragmentos $dx$.

$$I = \int \underbrace{(x\theta)\mathrm{d}x}_{\text{área de un fragmento}} \frac{M}{A} x^2$$

Resolvamos para un incremento de $x$ desde 0 hasta $R$.

$$I = \frac{M\theta}{A} \int_0^R x^3 \mathrm{d}x$$

$$I = \frac{M\theta}{A} \left[\frac{1}{4} x^4\right]_0^R$$

$$I = \frac{M\theta}{4A} (R^4 - 0^4)$$

$$I = \frac{M\theta R^4}{4A}$$

Sustituyamos el área de la rebanada, $A = (\theta/2\pi)(\pi R^2)$,

$$I = \frac{M\theta R^4}{4(\frac{1}{2}\theta R^2)}$$

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

No importa la cantidad de pizza que tengamos, mientras conozcamos la masa de la rebanada.

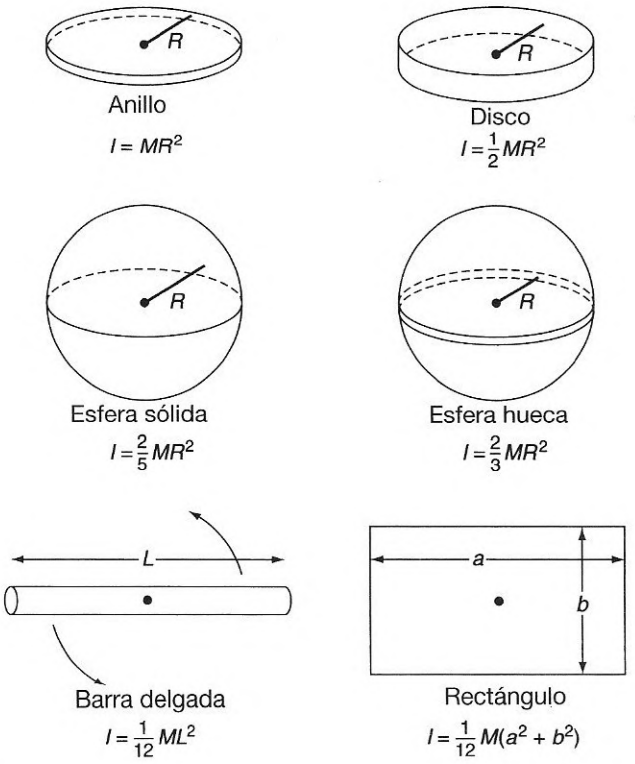
Después de todo el trabajo efectuado en el ejemplo anterior, tal vez le sorprenda la sencillez del resultado. Esto no es raro cuando se calculan momentos de inercia. Muchas formas comunes tienen momentos de inercia sencillos y es mucho más fácil buscarlos en tablas que calcularlos cada vez. Véanse los valores para algunas formas comunes en la tabla 7.1.

Sin embargo, a veces es necesario hacer algo un poco distinto. El momento de inercia de un círculo (o disco) que gira alrededor de su centro es $I = \frac{1}{2}MR^2$; pero, ¿qué pasa si gira alrededor de un punto situado en su borde en vez de hacerlo sobre su centro? El **teorema de los ejes paralelos** establece que

$$I = I_{CM} + Md^2$$

Es decir, el momento de inercia relativo a cualquier punto de un objeto es igual al momento de inercia para el centro de masa más la masa por el cuadrado de la distancia a la que el centro de giro se encuentra del centro de masa. De este modo, un disco que gira en torno a un punto sobre su borde tendría un momento de inercia de $I = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$.

**Tabla 7-1.** Momentos de inercia para objetos comunes que giran sobre su centro



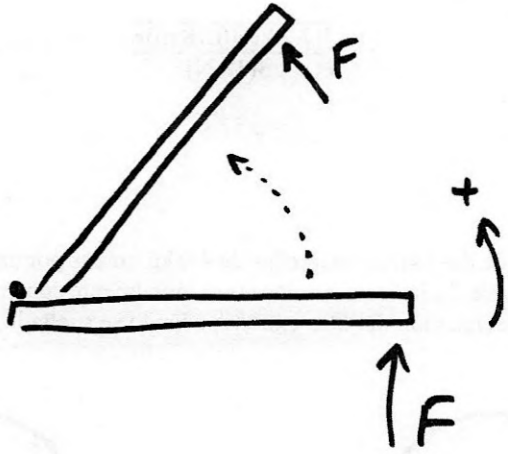

**EJEMPLO**

Al salir de una tienda, un niño empuja el picaporte de la puerta con una fuerza de 18 N. La puerta tiene 0.78 cm de ancho y 7.2 kg de masa. El niño empuja de manera perpendicular a la superficie de la puerta. ¿Cuánto tiempo tarda la puerta en abrirse (esto es, en girar 90°)?

En un ejemplo anterior encontramos que el momento de torsión es

$$\tau = FL \text{ sen } 90° = 14 \text{ N m}$$

Si conociéramos el momento de inercia, o masa angular, podríamos encontrar la aceleración angular. Y con la aceleración angular (que es constante) podríamos calcular el tiempo que tarda la puerta en girar 90°, o $\pi/2$ radianes.




La puerta (vista desde arriba) es esencialmente una barra que gira sobre un extremo.

$$I = I_{CM} + Md^2$$

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

La aceleración angular es

$$\tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{FL \text{ sen } 90^\circ}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3F}{ML}$$

Utilizando nuestra técnica de aceleración constante:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $\rightarrow$ | $\Delta\theta$ | = | $\pi/2$ |
| $v_0$ | $\rightarrow$ | $\omega_0$ | = | 0 |
| $v$ | $\rightarrow$ | $\omega$ | = | |
| $a$ | $\rightarrow$ | $\alpha$ | = | $3F/ML$ |
| $t$ | $\rightarrow$ | $t$ | = | ? |

No nos interesa la velocidad angular final, así que utilizamos

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0)t + \frac{1}{2}\left(\frac{3F}{ML}\right)t^2$$

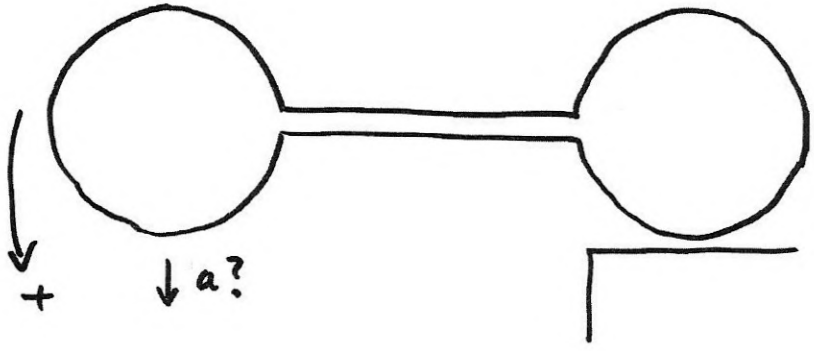
$$t = \sqrt{\frac{ML\pi}{3F}}$$

$$t = \sqrt{\frac{(7.2 \text{ kg})(0.78 \text{ m})\pi}{3(18 \text{ N})}}$$

$$t = 0.57 \text{ s}$$

**EJEMPLO**

Una haltera consta de dos esferas pequeñas de 4.0 kg unidas por una barra de 1.2 m de largo y 2.0 kg de masa. La haltera se coloca horizontalmente con un extremo sobre una mesa. ¿Cuál es la aceleración del otro extremo cuando se suelta la haltera?




Podríamos esperar que la respuesta fuera $g$. Sin embargo, un diagrama de cuerpo libre del extremo izquierdo muestra que la barra crea una fuerza en su extremo, y esta fuerza podría ser tanto vertical como horizontal. Dado que no sabemos cómo es esta fuerza, no podemos sumar fuerzas y aplicar la segunda ley de Newton.

Como un extremo permanece fijo en su lugar, parece tratarse de un problema de rotación. Podríamos encontrar el momento de torsión relativo al extremo fijo, después el momento de inercia, y calcular entonces la aceleración angular. Después relacionaríamos la aceleración con la aceleración angular empleando $a = R\alpha$.

El momento de torsión es

$$\tau = FR \text{ sen } \phi$$

$$\tau = (4 \text{ kg})g(1.2 \text{ m}) \text{ sen } 90^\circ + (2 \text{ kg})g(0.6 \text{ m}) \text{ sen } 90^\circ + (4 \text{ kg})g(0 \text{ m}) \text{ sen } (?)$$

$$\tau = 58.8 \text{ N m}$$

El momento de inercia es

$$I = I_{\text{izq}} + I_{\text{barra}} + I_{\text{der}}$$

$$I = (M_{\text{izq}}L^2) + \left[\frac{1}{12}M_{\text{barra}}L^2 + M_{\text{barra}}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + [M_{\text{der}}(0)^2]$$

En física, la palabra "pequeño" quiere decir "tan pequeño que podemos considerarlo igual a cero". Así, en vez de usar la fórmula para una esfera sólida, con el teorema de los ejes paralelos, consideramos que una esfera "pequeña" tiene un radio igual a cero.

$$I = [(4\text{ kg})L^2] + \left(\frac{1}{3}(2\text{ kg})L^2\right)$$

$$I = \left(4 + \frac{2}{3}\right)\text{ kg}\,(1.2\text{ m})^2$$

$$I = 6.72\text{ kg m}^2$$

La aceleración angular resulta

$$\tau = I\alpha$$

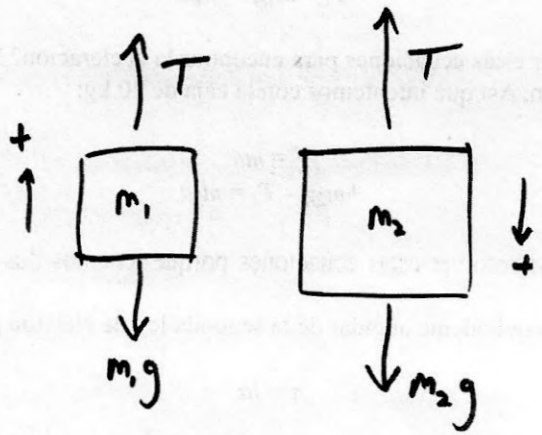
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{59\text{ N m}}{6.7\text{ kg m}^2} = 8.75\text{ rad/s}^2$$

Y la aceleración del extremo es

$$a = R\alpha = (1.2\text{ m})(8.75\text{ rad/s}^2) = 10.5\text{ m/s}^2$$

**EJEMPLO**

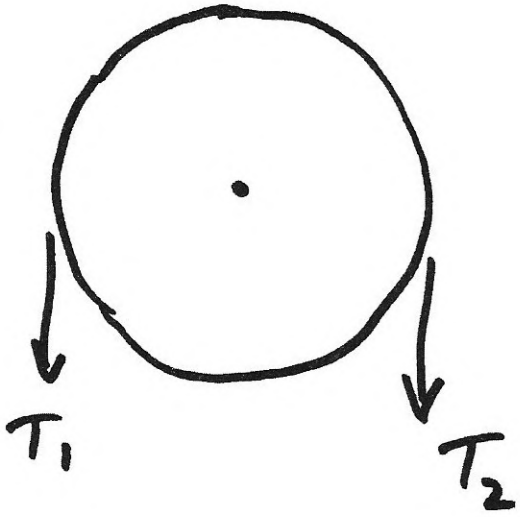
Dos cajas están atadas entre sí por una cuerda sin masa que pende de una polea. Las masas de las cajas son de 10 kg y 20 kg. La polea tiene radio de 0.31 m y masa de 16 kg. ¿Cuál es la aceleración de cada caja?




Ya resolvimos esto antes, sin incluir la rotación de la polea, y obtuvimos

$$\begin{cases} +T - m_1 g = m_1 a \\ +m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

Ahora la polea gira al moverse la cuerda sobre ella. La fuerza que hace que la polea gire es la fricción entre la cuerda y la polea.




Podemos usar las dos tensiones para calcular el momento de torsión sobre la polea. Dado que hay otra fuerza que actúa sobre la cuerda entre las tensiones, éstas no son necesariamente iguales, así que las llamaremos $T_1$ y $T_2$. Sumando las fuerzas que actúan sobre la caja de 10 kg:

$$F = ma$$
$$+T_1 - m_1 g = m_1 a$$

¿Podemos resolver estas ecuaciones para encontrar la aceleración? No, porque no conocemos la tensión. Así que intentemos con la caja de 20 kg:

$$F = ma$$
$$+m_2 g - T_2 = m_2 a$$

Tampoco podemos resolver estas ecuaciones porque tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas.

Utilicemos el equivalente angular de la segunda ley de Newton para la polea:

$$\tau = I\alpha$$
$$+ T_2 R - T_1 R = \left(\frac{1}{2} m_P R^2\right)\alpha$$

En el punto en que cada cuerda actúa sobre la polea, el brazo de momento es perpendicular a la polea, de modo que el ángulo es de 90°. Ahora tenemos otra ecuación, pero hemos introducido otra incógnita ($\alpha$).

Podemos relacionar la aceleración angular con la aceleración lineal mediante $a = R\alpha$, de modo que

$$(T_2 - T_1)\,R = \left(\frac{1}{2}\,m_P R^2\right)\frac{a}{R}$$

Ahora tenemos un sistema de ecuaciones que podemos resolver:

$$\begin{cases} +T_1 - m_1 g = m_1 a \\ +m_2 g - T_2 = m_2 a \\ +T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_P a \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones

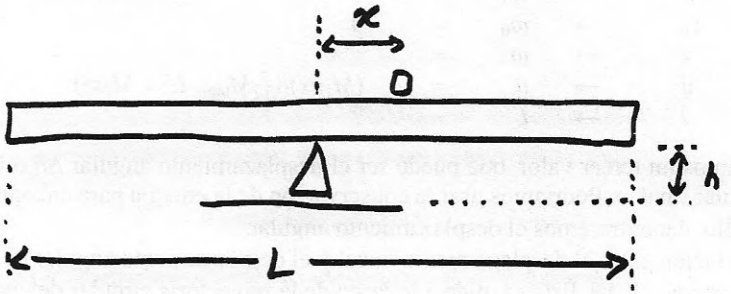
$$m_2 g - m_1 g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}\,m_P\right) a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_P)} = \frac{(20\text{ kg} - 10\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{(10\text{ kg} + 20\text{ kg} + \frac{1}{2}16\text{ kg})} = 2.6\text{ m/s}^2$$

¿Por qué el radio de la polea desapareció de las ecuaciones? A mayor radio, mayor momento de inercia, pero mayor momento de torsión que la misma tensión aplica a la polea.

**EJEMPLO**

Una tabla con masa de 6.5 kg ($M_{\text{tabla}}$) y 2.0 m de largo ($L$) se equilibra sobre un punto de apoyo de 8 cm de alto ($h$) en su centro. La tabla se inclina cuando una masa de 1.0 kg ($M_1$) se coloca sobre ella a 10 cm ($x$) del punto de apoyo. ¿Cuánto tarda el extremo de la tabla en tocar el piso?




Dado que la tabla gira sobre un punto de apoyo, debemos usar la rotación. La masa de 1.0 kg producirá un momento de torsión sobre la tabla que es casi constante, de modo que la aceleración angular será aproximadamente constante.

$$F = ma \quad \rightarrow \quad \tau = I\alpha$$

Si podemos encontrar el momento de torsión $\tau$ y el momento de inercia $I$, entonces podremos encontrar la aceleración angular $\alpha$. Con $\alpha$ podremos intentar aplicar nuestra técnica de aceleración constante.

Las fuerzas que actúan sobre la tabla son su peso, la fuerza normal ejercida por el punto de apoyo y el peso de la masa de 1.0 kg (en realidad debería ser la fuerza normal debida a la masa, pero si la aceleración de ésta es pequeña, entonces es aproximadamente igual al peso de la masa). Las dos primeras fuerzas actúan en el punto de apoyo, así que sus brazos de momento son cero y no crean ningún momento de torsión sobre la tabla.

$$\tau = FR \operatorname{sen} \phi$$

$$\tau = (M_1 g)(x) \operatorname{sen} 90^\circ = M_1 g x$$

El momento de inercia (masa angular) de la tabla y la masa de 1.0 kg es

$$I = I_{\text{tabla}} + I_1$$

$$I = \frac{1}{12} M_{\text{tabla}} L^2 + M_1 x^2$$

La aceleración angular es

$$\tau = I\alpha$$

$$M_1 g x = \left( \frac{1}{12} M_{\text{tabla}} L^2 + M_1 x^2 \right) \alpha$$

$$\alpha = \frac{M_1 g x}{\frac{1}{12} M_{\text{tabla}} L^2 + M_1 x^2}$$

Con la aceleración angular, intentemos la técnica de aceleración constante.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $\rightarrow$ | $\Delta\theta$ | = | |
| $v_0$ | $\rightarrow$ | $\omega_0$ | = | 0 |
| $v$ | $\rightarrow$ | $\omega$ | = | |
| $a$ | $\rightarrow$ | $\alpha$ | = | $(M_1 g x)/(\frac{1}{12} M_{\text{tabla}} L^2 + M_1 x^2)$ |
| $t$ | $\rightarrow$ | $t$ | = | ? |

Necesitamos un tercer valor, que puede ser el desplazamiento angular $\Delta\theta$ o la velocidad angular final $\omega$. Podríamos usar la conservación de la energía para encontrar $\omega$. En vez de ello, encontraremos el desplazamiento angular.

La relación entre el desplazamiento lineal y el desplazamiento angular es $x = R\theta$, o en este caso $h = L\,\Delta\theta$. Éste se mide a lo largo de la trayectoria circular del extremo de la tabla, no en línea recta. Podríamos usar la trigonometría para encontrar el ángulo, pero para ángulos pequeños como éste sen $\theta \approx \theta$, así que el resultado sería aproximadamente el mismo.

No nos interesa la velocidad angular final, de modo que utilizamos

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\frac{h}{L} = (0)t + \frac{1}{2} \left( \frac{M_1 g x}{\frac{1}{12} M_{\text{tabla}} L^2 + M_1 x^2} \right) t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h\,(\frac{1}{12}M_{\text{tabla}}L^2 + M_1x^2)}{LM_1gx}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(0.08\text{ m})[\frac{1}{12}(6.5\text{ kg})(2.0\text{ m})^2 + (1.0\text{ kg})(0.10\text{ m})^2]}{(2.0\text{ m})(1.0\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(0.10\text{ m})}}$$

$$t = 0.42\text{ s}$$

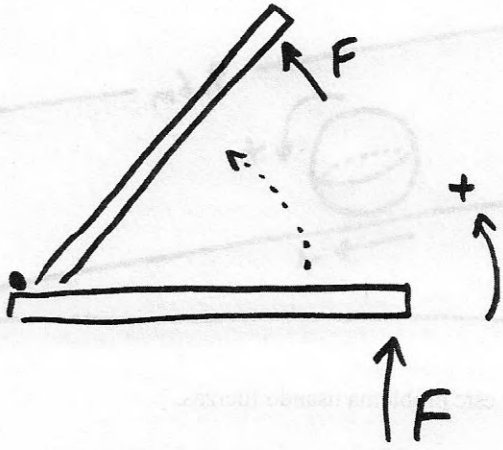
## 7.4 ENERGÍA Y MOVIMIENTO GIRATORIO

Todo lo que hemos hecho con la energía también se aplica a las cantidades angulares:

$$EK = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad EK = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$
$$W = Fd \quad \rightarrow \quad W = \tau\,\Delta\theta$$

**EJEMPLO**

Al salir de una tienda, un niño empuja el picaporte de la puerta con una fuerza de 18 N. La puerta tiene 0.78 cm de ancho y 7.2 kg de masa. El niño empuja de manera perpendicular la superficie de la puerta. ¿Con qué rapidez gira la puerta al abrirse (esto es, al girar 90°)?




Podríamos resolver este problema usando la aceleración angular constante, debido en particular a que ya hemos calculado la mayoría de las cantidades importantes. También podríamos usar la conservación de la energía. Un indicio de que valdría la pena intentar con la energía es que no están presentes ni la aceleración ni el tiempo.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

$$(0) + (0) + \tau\,\Delta\theta = \frac{1}{2} I(\omega')^2 + (0)$$

En un ejemplo anterior encontramos que el momento de torsión es

$$\tau = FL \text{ sen } 90^\circ = 14 \text{ N m}$$

y que el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{3} ML^2 = \frac{1}{3}(7.2 \text{ kg})(0.78 \text{ m})^2 = 1.46 \text{ kg m}^2$$

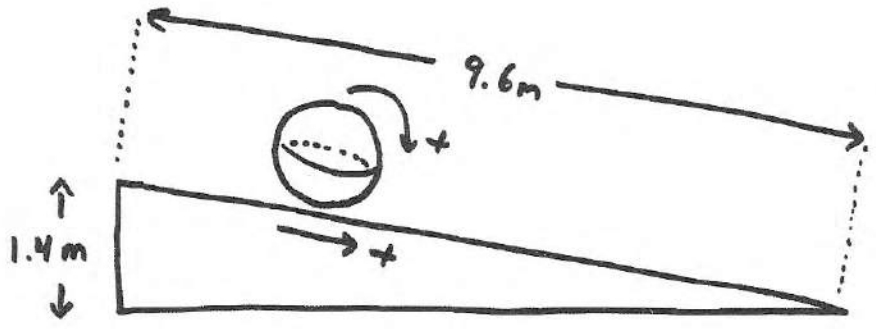
$$(14 \text{ N m}) \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} (1.46 \text{ kg m}^2)(\omega')^2$$

$$\omega' = 5.5 \text{ rad/s}$$

El movimiento giratorio no suele tener energía potencial. Podría tenerla —imagine el escotillón abierto de un ático—, pero no es una situación común.

**EJEMPLO**

Una bola de boliche de 7.0 kg rueda sin deslizamiento rampa abajo. La rampa tiene 1.4 m de alto y 9.6 m de largo. ¿Con qué rapidez se mueve la bola cuando llega al extremo de la rampa?




Podríamos resolver este problema usando fuerzas.

$$\sum F_x = +mg \text{ sen } \beta - \mathcal{F} = ma_x$$

$$\sum F_y = +N - mg \cos \beta = ma_y = 0$$

En este caso, $\beta$ es el ángulo que la rampa forma con el piso. No conocemos la fuerza de fricción $\mathcal{F}$ ni la aceleración $a_x$. Dado que la bola rueda sin deslizamiento, la

fricción es estática y no podemos usar $\mathcal{F} = \mu N$. Necesitamos otro dato. Ese dato es la rotación

$$\sum \tau = \mathcal{F}R \text{ sen } 90° = I\alpha$$

La gravedad y la fuerza normal no crean ningún momento de torsión alrededor del centro de la bola. Relacionamos $\alpha$ y $a_x$ usando

$$a_x = R\alpha$$

Cuando reunimos todo esto encontramos la aceleración de la bola al descender por la rampa. Entonces empleamos la técnica de aceleración constante para encontrar la velocidad final.

De manera alternativa, podríamos usar la conservación de la energía. El hecho de que queremos encontrar la rapidez final y no nos interesan la aceleración ni el tiempo es un indicio de que la energía es un buen punto de partida.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

$$(0) + mgh + W = \left(\frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}I(\omega')^2\right) + mg(0)$$

Tenemos energía cinética tanto del desplazamiento como del giro. El trabajo efectuado por la fuerza normal es cero porque la fuerza es perpendicular al movimiento. El trabajo realizado por la fuerza de fricción es cero porque no hay deslizamiento, así que no hay movimiento en el punto de contacto.

$$mgh = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}I(\omega')^2$$

Tenemos dos incógnitas y una sola ecuación. Pero podemos relacionar la rotación y el movimiento lineal mediante $v = R\omega$, de modo que

$$mgh = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v'}{R}\right)^2$$

$$gh = \frac{7}{10}(v')^2$$

$$v' = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

$$v' = \sqrt{\frac{10}{7}(9.8 \text{ m/s}^2)(1.4 \text{ m})}$$

$$v' = 4.4 \text{ m/s}$$

Advierta que $m$ y $R$ se cancelan en la ecuación. Sin importar cuál sea el tamaño o la masa de la bola, ésta tendrá la misma rapidez cuando llegue al final de la rampa (la masa tampoco importa en el caso de un deslizamiento sin fricción). Lo que importa es la forma: si se tratara de una esfera hueca o de un tubo en lugar de una esfera sólida, el valor 2/5 habría sido diferente, y el resultado habría sido distinto.

## 7.5 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR E IMPULSO ANGULAR

Todo lo que hicimos con la cantidad de movimiento también se aplica a las cantidades angulares:

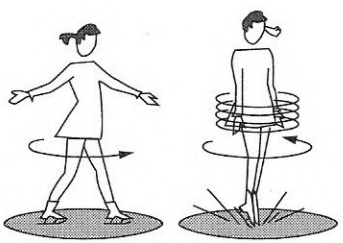
$$P = mv \quad \rightarrow \quad L = I\omega = PR \text{ sen } \phi$$
$$\Delta P = Ft \quad \rightarrow \quad \Delta L = \tau t$$

Para un objeto que gira utilizamos $I\omega$, pero para un objeto puntual que se mueve alrededor de un punto solemos usar $PR$ sen $\phi$. Impulso angular es el nombre dado al cambio en la cantidad de movimiento angular, que por lo tanto tiene las mismas unidades que la cantidad de movimiento angular (kg m$^2$/s). La ecuación básica es

$$L_{\text{antes}} + \Delta L = L_{\text{después}} \qquad \text{o bien} \qquad L + \Delta L = L'$$

**EJEMPLO**

Una patinadora sobre hielo recoge los brazos para girar más rápido. Si ella triplica su rapidez rotacional, ¿qué ocurre con su momento de inercia?



Dado que en el problema no se menciona nada acerca de aceleración o tiempo, una ley de conservación es un buen punto para comenzar. Se requiere fuerza para que la patinadora recoja los brazos, por lo que realiza trabajo en el proceso. Dado que no sabemos cuánto trabajo realiza, la conservación de la energía no parece promisoria. La patinadora no se desplaza en línea recta sino que gira, así que tratemos con la conservación de la cantidad de movimiento angular.

$$L + \Delta L = L'$$

La fuerza que la patinadora ejerce para recoger los brazos tiene sentido hacia ella, de modo que la fuerza es antiparalela al brazo de momento y el momento de torsión es cero. Debido a esto, el impulso angular es cero.

$$I\omega + (0) = I'\,\omega'$$
$$I\omega = I'(3\omega)$$
$$I' = \frac{1}{3}I$$

Al recoger los brazos, la patinadora reduce su momento de inercia por un factor de 3.

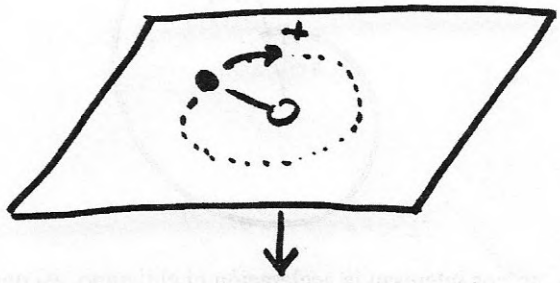
¿Qué efecto tiene esto en su energía cinética?

$$EK' = \frac{1}{2}I'(\omega')^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}I)(3\omega)^2 = 3\,\frac{1}{2}I\omega^2 = 3EK$$

¿De dónde proviene esta energía adicional? Ella ejerce una fuerza hacia el centro de giro sobre sus brazos al moverlos hacia dentro, de manera que realiza trabajo positivo y su energía aumenta.

**EJEMPLO**

Un objeto pequeño se mueve en círculo en el extremo de una cuerda sobre una tabla horizontal sin fricción. Inicialmente el objeto se mueve a 0.74 m/s en el extremo de la cuerda de 17 cm. Entonces se tira de la cuerda a través de un orificio en el centro de la tabla. ¿Con qué rapidez se mueve el objeto cuando sólo quedan 5.0 cm de la cuerda?



Una vez más, no nos interesan la aceleración ni el tiempo, así que intentamos una ley de conservación.

$$L + \Delta L = L'$$

La fuerza ejercida sobre el objeto por la cuerda es antiparalela al brazo de momento y no crea momento de torsión. La fuerza normal cancela la gravedad, de modo que el momento de torsión total es cero. Utilizamos $L = PR \text{ sen } \phi$ para la cantidad de movimiento angular.

$$PR \text{ sen } \phi + (0) = P'R' \text{ sen } \phi'$$

El objeto se mueve en círculo, con la cantidad de movimiento perpendicular al brazo de momento, tanto antes como después de que se tire de la cuerda, de modo que $\phi = \phi' = 90°$.

$$PR = P'R'$$

$$mvR = mv'R'$$

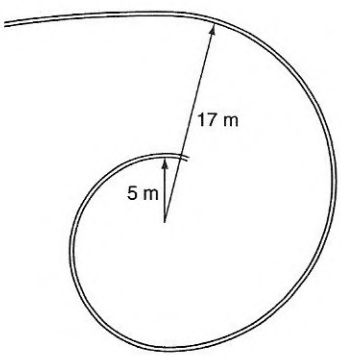
$$v' = \frac{vR}{R'}$$

$$v' = \frac{(0.74 \text{ m/s})(17 \text{ cm})}{(5.0 \text{ cm})}$$

$$v' = 2.5 \text{ m/s}$$

**EJEMPLO**

Una montaña rusa tiene un tramo horizontal en espiral donde el radio de curvatura disminuye de 17 m a 5.0 m. Si el carro entra en la espiral a 7.4 m/s, ¿cuál es la rapidez al final de la espiral?




De nueva cuenta, no nos interesan la aceleración ni el tiempo, así que intentamos una ley de conservación. Cuando el carro se acerca al centro, la fuerza ejercida por los rieles se hace perpendicular a éstos (es una fuerza normal), pero *no* está dirigida hacia el centro de la espiral. La fuerza no es antiparalela al brazo de momento, el momento de torsión no es cero y el impulso angular no es cero. Por lo tanto, la conservación de la cantidad de movimiento angular, que funcionó tan bien en el ejemplo anterior, no es útil en este caso; sigue cumpliéndose, pero dado que no podemos calcular la fuerza ejercida por los rieles (o al menos no podemos hacerlo tan fácilmente como antes), no es posible usar dicha ley para obtener la respuesta.

Si la fuerza es perpendicular al movimiento, entonces el trabajo es cero, y la conservación de la energía parece promisoria.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + (0) + (0) = \frac{1}{2}m(v')^2 + (0)$$

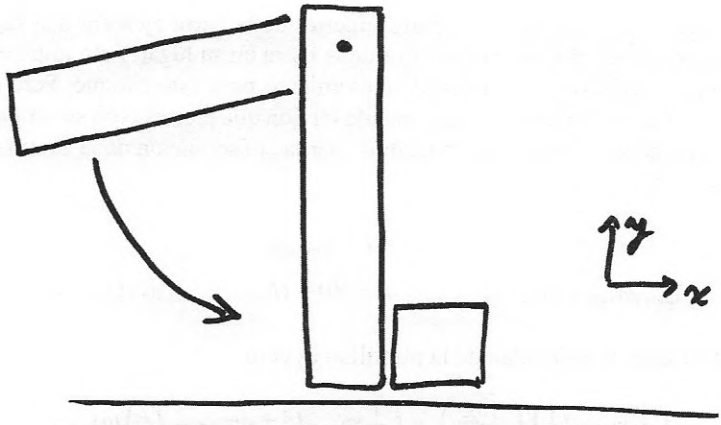
$$v' = v = 7.4 \text{ m/s}$$

Toda vez que no se realiza trabajo en la montaña rusa, la energía cinética no cambia y la rapidez permanece constante.

La diferencia entre el ejemplo anterior y éste es el sentido de la fuerza. En el ejemplo previo siempre se dirige hacia el centro de giro, no así en este ejemplo.

**EJEMPLO**

Una barra uniforme de 0.85 kg de masa y 35 cm de largo cae girando sobre el pivote en uno de sus extremos y golpea un bloque de plastilina de 0.56 kg. El bloque queda unido al extremo de la barra. ¿Cuál es la rapidez de la plastilina después de ser golpeada por la barra?




Este problema apareció en el capítulo anterior, pero no pudimos resolverlo. La primera dificultad fue que no toda la barra se movía con la misma rapidez. Ahora podemos describir el movimiento de la barra usando la rotación. La segunda dificultad era manejar el impulso del pivote durante el choque. Ahora contamos con los recursos necesarios para pasarlo por alto.

Siguiendo la solución del ejemplo en el capítulo anterior, deseamos usar la conservación de la energía para encontrar la rapidez de la barra en el momento del choque.

$$EK_{\text{arriba}} + EP_{\text{arriba}} + W = EK_{\text{vert}} + EP_{\text{vert}}$$

$$\frac{1}{2}I_{\text{barra}}(0)^2 + m_{\text{barra}}gh_{\text{arriba}} + W = \frac{1}{2}I_{\text{barra}}(\omega_{\text{vert}})^2 + m_{\text{barra}}gh_{\text{vert}}$$

El trabajo realizado por el pivote es cero porque éste no se mueve y no hay fricción al girar sobre él. El trabajo efectuado por la gravedad se considera en la energía potencial.

$$\frac{1}{2}I_{\text{barra}}(\omega_{\text{vert}})^2 = m_{\text{barra}}gh_{\text{arriba}} - m_{\text{barra}}gh_{\text{vert}}$$

Utilizando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de la barra es

$$I_{\text{barra}} = \frac{1}{12}m_{\text{barra}}L^2 + m_{\text{barra}}(L/2)^2 = \frac{1}{3}m_{\text{barra}}L^2$$

El cambio de altura de la barra es el cambio de altura del centro, que se encuentra a la mitad de la longitud.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_{\text{barra}}L^2\right)(\omega_{\text{vert}})^2 = m_{\text{barra}}g\left(\frac{1}{2}L\right)$$

$$\frac{1}{3}L(\omega_{\text{vert}})^2 = g$$

$$\omega_{\text{vert}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Durante el choque, el pivote en la parte superior de la barra ejercerá una fuerza suficiente para mantener el extremo superior de la barra en su lugar. Esto impide que usemos la conservación de la cantidad de movimiento para este choque. Pero dado que esta fuerza actúa en el pivote, el momento de torsión que crea es cero sin importar cuán grande sea la fuerza. Por lo tanto, podemos usar la conservación de la cantidad de movimiento angular.

$$L_{\text{vert}} + \Delta L = L_{\text{después}}$$

$$I_{\text{barra}}\omega_{\text{vert}} + m_{\text{plastilina}}v_{\text{plastilina}}L + (0) = (I_{\text{barra}} + I_{\text{plastilina}})\,\omega_{\text{después}}$$

Antes del choque, la velocidad de la plastilina es cero.

$$\left(\frac{1}{3}m_{\text{barra}}L^2\right)\left(\sqrt{\frac{3g}{L}}\right) = \left(\frac{1}{3}m_{\text{barra}}L^2 + m_{\text{plastilina}}L^2\right)\omega_{\text{después}}$$

$$\omega_{\text{después}} = \frac{m_{\text{barra}}}{m_{\text{barra}} + 3m_{\text{plastilina}}}\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

La rapidez de la plastilina es

$$v = R\omega = L\omega_{\text{después}}$$

$$v = \frac{m_{\text{barra}}}{m_{\text{barra}} + 3m_{\text{plastilina}}}\sqrt{3gL}$$

$$v = \frac{(0.85\text{ kg})}{(0.85\text{ kg}) + 3(0.56\text{ kg})}\sqrt{3(9.8\text{ m/s}^2)(0.35\text{ m})}$$

$$v = 1.08\text{ m/s}$$

*LECCIÓN*

La conservación de la cantidad de movimiento angular nos permite pasar por alto las fuerzas en el pivote o dirigidas hacia él.

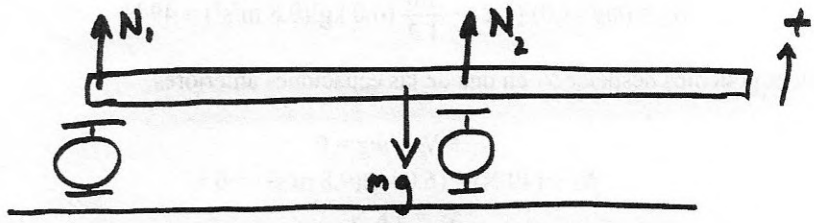
## 7.6 ESTÁTICA

Estático significa sin cambio, y en física e ingeniería estática es el estudio de objetos que no experimentan movimiento. Con ello queremos decir no sólo que un objeto no

se mueve ($v = 0$), sino que su movimiento no cambia ($a = 0$); no sólo que no gira ($\omega = 0$), sino que su rotación no cambia ($\alpha = 0$).

**EJEMPLO**

Una tabla de 6.0 kg de masa y 2.0 m de largo está sostenida por dos básculas, una en el extremo izquierdo y otra a 1.2 m de éste. ¿Cuál es la lectura en cada báscula?




Cada báscula empuja de la tabla mientras mide la fuerza, así que sumemos las fuerzas:

$$F = ma$$
$$0 \text{ (ninguna)} = ma_x = 0$$
$$N_1 + N_2 - mg = ma_y = 0$$

La primera ecuación no nos es de utilidad: no hay fuerzas ni movimiento en la dirección horizontal. No podemos resolver la segunda ecuación (todavía) porque hay dos incógnitas y una sola ecuación. Necesitamos otro dato.

Dado que la tabla permanece sin girar, la aceleración angular es cero. Puesto que no gira alrededor de ningún punto, la aceleración angular alrededor de cualquier punto es cero y por lo tanto, el momento de torsión alrededor de cualquier punto es cero. Usemos el centro de la tabla como nuestro pivote y tomemos el sentido contrario al de las manecillas del reloj como el sentido positivo para la rotación:

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$\sum_i F_i R_i \operatorname{sen} \phi_i = 0$$
$$-N_1(1.0 \text{ m})(1) + N_2(0.2 \text{ m}) \underbrace{(1)}_{\operatorname{sen} 90^\circ} + (mg)(0) \operatorname{sen}(?) = 0$$
$$-N_1(1.0) + N_2(0.2) = 0$$

Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, de modo que podemos resolverlas (advierta que el momento de torsión causado por $N_1$ está en el sentido negativo).

De manera alternativa, ¿qué pasaría si hubiéramos elegido el extremo izquierdo como nuestro punto pivote?

$$\sum_i F_i R_i \operatorname{sen} \phi_i = I\alpha = 0$$

$$N_1(0)\ \text{sen}(?) + N_2(1.2\ \text{m}) \underbrace{(1)}_{\text{sen } 90^\circ} - (mg)(1.0\ \text{m})(1) = 0$$

$$+N_2(1.2) - (mg)(1.0) = 0$$

Podemos despejar directamente $N_2$.

$$N_2 = (mg)(1.0)/(1.2) = \frac{1.0}{1.2}(6.0\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 49\ \text{N}$$

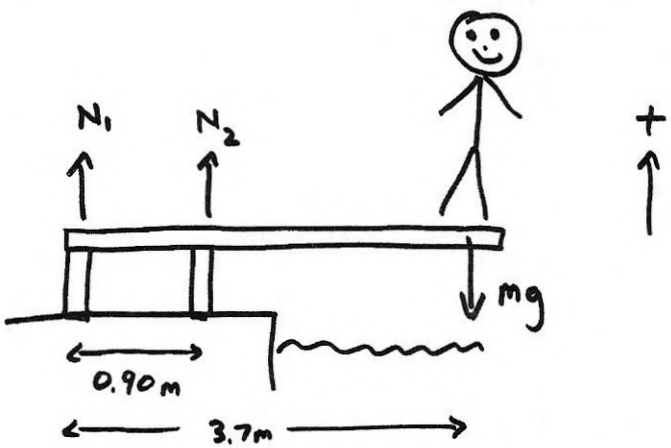
Entonces podemos despejar $N_1$ en una de las ecuaciones anteriores.

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$
$$N_1 + (49\ \text{N}) - (6.0\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 0$$
$$N_1 = 9.8\ \text{N}$$

Cuando la fuerza se aplica en el punto pivote, o de modo que la fuerza sea paralela al brazo de momento, el momento de torsión que crea es cero. Esto elimina uno o más momentos de torsión de la ecuación y facilita su solución. Esto es especialmente útil cuando el momento de torsión que se elimina fue creado por una de las fuerzas desconocidas.

**EJEMPLO**

Un clavadista de 75 kg está parado en el extremo de un trampolín. Este último tiene masa despreciable, 3.7 m de largo y dos soportes, a 0.90 m de distancia entre sí, uno de ellos en el extremo opuesto al clavadista. ¿Cuál es la fuerza que cada soporte ejerce sobre el trampolín?




Este problema es muy similar al anterior. Sumamos las fuerzas verticales

$$\sum F_y = ma_y$$
$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

No es cierto que el peso del clavadista actúe sobre el trampolín. El peso del clavadista actúa sobre el clavadista y la fuerza normal del trampolín también actúa sobre el clavadista. Dado que estas fuerzas suman cero (de modo que $a_{\text{clavadista}} = 0$), la fuerza normal que el trampolín ejerce sobre el clavadista, y por lo tanto, la fuerza que el clavadista ejerce sobre el trampolín, es igual al peso del clavadista. Una vez dicho esto, no mencionaremos este paso en lo sucesivo. Dado que se desconoce $N_1$, sumamos los momentos de torsión alrededor del extremo izquierdo.

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\sum_i F_i R_i \operatorname{sen} \phi_i = 0$$

$$N_1(0)\operatorname{sen}(?) - N_2(0.90\text{ m})\underbrace{(1)}_{\operatorname{sen} 90^\circ} + (mg)(3.7\text{ m})(1) = 0$$

$$-N_2(0.90) + (mg)(3.7) = 0$$

$$N_2 = \frac{(mg)(3.7)}{(0.90)} = \frac{3.7}{0.90}(75\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 3020\text{ N}$$

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$N_1 + (3020\text{ N}) - (75\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 0$$

$$N_1 = -2290\text{ N}$$

¿Puede ser negativa una fuerza normal? El signo negativo significa que el soporte izquierdo debe tirar hacia abajo del extremo izquierdo del trampolín. Esto sólo puede ocurrir si el trampolín está sujeto al soporte izquierdo en vez de estar sólo apoyado en él. ¿Tiene esto sentido? ¿Qué habría ocurrido si como punto pivote hubiéramos elegido el punto medio del trampolín, o el soporte derecho? Si el soporte izquierdo empujara hacia arriba, entonces todos los momentos de torsión habrían actuado en el sentido de las manecillas del reloj y el momento de torsión total no habría podido ser cero.

**EJEMPLO**

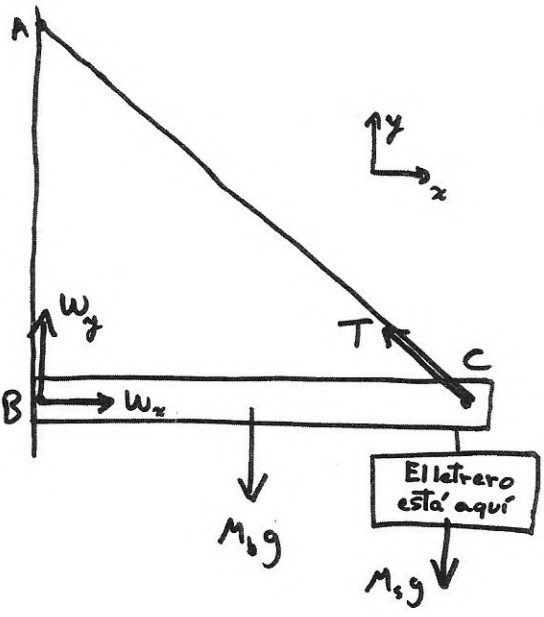
Un letrero de 25 kg pende de una viga de 3.0 m de largo y 14 kg de masa. El extremo de la viga está sostenido por un alambre que forma un ángulo de 39° con ella. ¿Cuál es la tensión en el alambre?

Desconocemos no sólo la fuerza que la pared ejerce sobre la viga, sino también el sentido de dicha fuerza. Pero cualquiera que sea el sentido, tiene una componente $x$ y una componente $y$ que podemos usar. Sumemos las fuerzas:

$$F = ma$$

$$+\mathcal{W}_x - T\cos 39^\circ = m_{\text{viga}}a_x = 0$$

$$+\mathcal{W}_y - M_{\text{viga}}g - M_{\text{letrero}}g + T\operatorname{sen} 39^\circ = m_{\text{viga}}a_y = 0$$




Dado que no conocemos $W_x$, $W_y$ ni $T$, todavía no podemos resolver ninguna de estas ecuaciones. Necesitamos sumar todos los momentos de torsión. Eligiendo de manera conveniente el punto pivote podemos eliminar de la ecuación dos momentos de torsión (pudimos eliminar sólo uno antes, porque todas las fuerzas eran paralelas). Dado que nuestras fuerzas desconocidas son $W_x$, $W_y$ y $T$, nos gustaría eliminar dos de ellas. Para ello, elegimos $A$, $B$ o $C$ como nuestro punto pivote. ¿Podemos usar $A$ aunque no esté en el objeto? ¡Por supuesto! (Podríamos elegir París como nuestro punto pivote y funcionaría, pero la elección de París no facilita la solución de las ecuaciones, así que nos abstenemos.)

Puesto que deseamos encontrar la tensión $T$, utilizaremos $B$ como punto pivote, con lo cual se eliminan $W_x$ y $W_y$, y nos deja con una ecuación en la que podemos despejar $T$.

$$\sum_i F_i R_i \operatorname{sen} \phi_i = I\alpha = 0$$

$$W_x(0)\operatorname{sen}(?) + W_y(0)\operatorname{sen}(?) - M_{\text{viga}}g\left(\frac{1}{2}L\right)(1) - \mathrm{M}_{\text{letrero}}g(L)(1) + T(L)\operatorname{sen} 39^\circ = 0$$

$$-\frac{1}{2}M_{\text{viga}}g - M_{\text{letrero}}g + T\operatorname{sen} 39^\circ = 0$$

$$T = \left(\frac{1}{2}M_{\text{viga}}g + M_{\text{letrero}}g\right) / \operatorname{sen} 39^\circ$$

$$T = \left(\frac{1}{2}(14\text{ kg}) + (25\text{ kg})\right)(9.8\text{ m/s}^2)/\operatorname{sen} 39^\circ$$

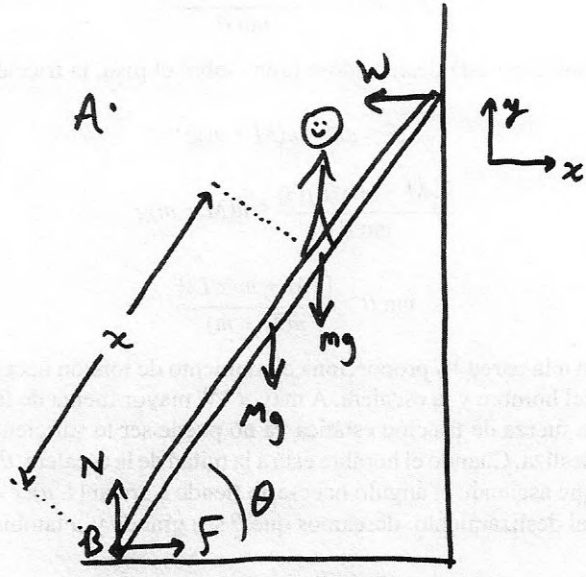
$$T = 498\text{ N}$$

*LECCIÓN*

En un problema de estática siempre es posible eliminar al menos uno de los momentos de torsión de la ecuación correspondiente mediante la elección apropiada del punto pivote. Elíjalo de modo que se elimine un momento de torsión causado por una fuerza desconocida.

**EJEMPLO**

Una escalera con masa $M$ y longitud $L$ se apoya en la pared lisa de un edificio y tiene coeficiente de fricción $\mu$ con el piso. Un hombre con masa $m$ se encuentra sobre la escalera a una distancia $x$ del pie de la misma. ¿A qué ángulo $\theta$ respecto al piso comenzará a deslizarse la escalera? Para evitar el deslizamiento, ¿debe elegirse un ángulo mayor o menor que éste?




Comencemos por sumar las fuerzas:

$$+\mathcal{F} - \mathcal{W} = Ma_x = 0$$
$$+N - Mg - mg = Ma_y = 0$$

El que la pared sea "lisa" significa que no incluimos la fricción entre la escalera y el edificio.

No conocemos $\mathcal{F}$, $\mathcal{W}$ ni $N$, y deseamos encontrar $\mathcal{F}$, así que podría tener sentido elegir $A$ como nuestro punto pivote. Sin embargo, esto haría mucho más difícil escribir la ecuación de momentos de torsión (trate de imaginar los brazos de momento), así que emplearemos $B$.

$$\sum_i F_i R_i \operatorname{sen} \phi_i = I\alpha = 0$$

$$N(0)\,\text{sen}(?) + \mathcal{F}(0)\,\text{sen}(?) - Mg\left(\frac{1}{2}L\right)\,\text{sen}\,(90° - \theta) - mg(x)\,\text{sen}(90° - \theta)$$

$$+\mathcal{W}(L)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$-Mg\left(\frac{1}{2}L\right)\cos\theta - mg(x)\cos\theta + \mathcal{W}(L)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Hemos aplicado la identidad $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$.

$$\mathcal{W} = \frac{(\frac{1}{2}ML + mx)\,g}{L}\,\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{W} = \frac{[\frac{1}{2}M + m(x/L)]\,g}{\tan\theta}$$

Dado que la escalera no está deslizándose (aún) sobre el piso, la fricción es estática:

$$\mathcal{F} \leq \mu N = \mu(M + m)g$$

$$\frac{[\frac{1}{2}M + m(x/L)]\,g}{\tan\theta} \leq \mu(M + m)g$$

$$\tan\theta \geq \frac{[\frac{1}{2}M + m(x/L)]}{\mu(M + m)}$$

La fuerza debida a la pared $\mathcal{W}$ proporciona el momento de torsión necesario para compensar el peso del hombre y la escalera. A mayor $\mathcal{W}$, mayor fuerza de fricción se necesita, hasta que la fuerza de fricción estática ya no puede ser lo suficientemente grande y la escalera se desliza. Cuando el hombre está a la mitad de la escalera, $\theta = \arctan(1/2\mu)$, pero a medida que asciende el ángulo necesario tiende a $\arctan(1/\mu)$($x \to L$ donde $m \geq M$). Para evitar el deslizamiento, deseamos que $\theta$ sea grande y $\mu$ también.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- Utilice la rotación para objetos que tienen un punto pivote fijo, aunque no estén girando en ese momento.
- Todo lo que hemos hecho hasta el momento sigue aplicándose, pero con cantidades angulares:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $\to$ | $\theta$ |
| $v$ | $\to$ | $\omega$ |
| $a$ | $\to$ | $\alpha$ |
| $m$ | $\to$ | $I$ |
| $F$ | $\to$ | $\tau$ |
| $P$ | $\to$ | $L$ |

$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$
$$F = ma \quad \rightarrow \quad \tau = I\alpha$$
$$P = mv \quad \rightarrow \quad L = I\omega$$

- Relacionamos las cantidades lineales (tangenciales) y angulares mediante

$$x = R\theta$$
$$v = R\omega$$
$$a = R\alpha$$
$$\tau = FR \text{ sen } \phi$$
$$L = PR \text{ sen } \phi$$

- ¡Cuidado con $R$ (o $r$)! $R$ siempre es la distancia al punto pivote, pero puede usarse varias veces en el mismo problema para referirse a diferentes distancias.
- En un problema de estática, elija el punto pivote de modo que se elimine el momento de torsión debido a una fuerza que se desconoce.

CAPÍTULO 8

# CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

La electricidad trata sobre las cargas, el modo en que se mueven y cómo se les aprovecha para producir trabajo. ¿Qué es la carga? Es una propiedad de algunas partículas. La característica importante de una partícula con carga es que produce fuerzas sobre otras partículas con carga. Las partículas cargadas crean campos eléctricos, los cuales crean fuerzas que actúan sobre las partículas. Las partículas cargadas en movimiento crean campos magnéticos, los cuales, a su vez, producen fuerzas sobre las partículas cargadas en movimiento. ¿Qué es un "campo"? Lo veremos pronto.

Las fuerzas eléctricas y magnéticas son como cualquier otra fuerza, de modo que todas las técnicas que hemos aprendido hasta ahora siguen siendo válidas. Cuando una carga experimenta una fuerza eléctrica, trazamos un diagrama de cuerpo libre de todas las fuerzas incluida la fuerza eléctrica, igual que antes. Las fuerzas eléctricas y magnéticas son como la gravedad: actúan a distancia; no es necesario que dos cargas estén en contacto para crear una fuerza, del mismo modo que la Tierra no tiene que tocar una manzana para atraerla hacia ella por gravedad.

He aquí cinco cosas que debemos recordar acerca del comportamiento de las cargas:

- Hay dos tipos de cargas, que llamamos positivas y negativas.
- Cargas opuestas se atraen y cargas iguales se repelen.
- Cuanto más cerca estén las cargas entre sí, tanto mayor será la fuerza.
- Las cargas pueden moverse en un material conductor, pero no en uno aislante.
- La "tierra" puede suministrar una cantidad infinita de carga.

Cuando una carga positiva y una negativa producen fuerzas una sobre la otra, las fuerzas no tienen necesariamente sentido negativo. Con base en la tercera ley de Newton, la fuerza sobre una tiene sentido opuesto al de la fuerza sobre la otra.

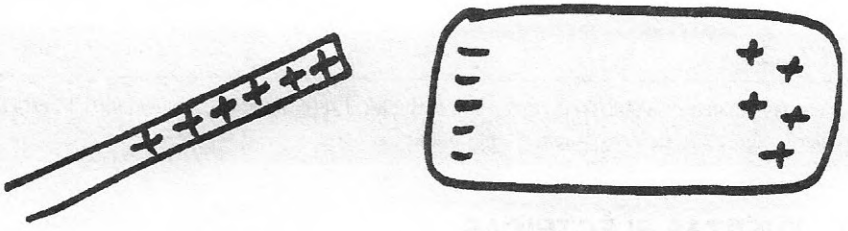
**EJEMPLO**

Una barra con carga positiva se acerca a un conductor neutro. ¿Cuál es el sentido de la fuerza sobre el conductor?

Un objeto neutro carece de carga neta; tiene una cantidad igual de protones (+) que de electrones (–). Pero no necesariamente las cargas están distribuidas de manera uniforme. Cuando se le acerca un objeto con carga positiva, éste atrae a sus electrones (negativos). Debido a que los electrones se encuentran en un material conductor, pueden desplazarse, y algunos de ellos se mueven hacia la barra.

De modo similar, las cargas positivas en el conductor son repelidas por la barra y se alejan de ella. (En realidad son sólo las cargas negativas las que se mueven, dejando atrás un exceso de cargas positivas, pero es más fácil pensar y decir que las cargas

positivas también se mueven.) Cuando la carga se mueve en un conductor por efecto de cargas cercanas hablamos de "carga inducida".

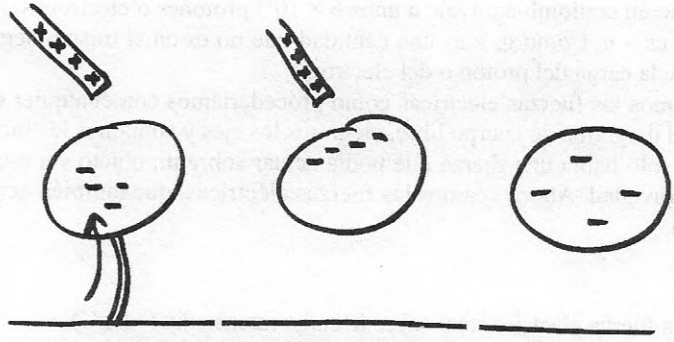


Las cargas negativas están más cerca de la barra que las positivas, de modo que sobre ellas la fuerza eléctrica es más intensa. La fuerza neta en el conductor se dirige hacia la barra. De modo similar, la fuerza neta en la barra se dirige hacia el conductor.

**EJEMPLO**

Una barra con carga positiva se acerca a un conductor conectado a tierra. La conexión a tierra se interrumpe y la barra se aleja. ¿Cuál es la carga del conductor? ¿Y si el orden se invierte (la barra se aleja y luego se interrumpe la conexión a tierra)?

Cuando decimos "tierra" nos referimos a un objeto tan grande que podemos tomar carga de él y permanecerá neutro o tan cerca de la neutralidad que nadie podría advertir cambio alguno. Cuando acercamos la barra con carga positiva al conductor, la barra atrae las cargas negativas (electrones). Algunas de ellas pasan de la tierra al conductor, de modo que éste adquiere una carga negativa neta.



Si se interrumpe la conexión a tierra, las cargas negativas dejan de tener una trayectoria para entrar o salir del conductor, quedan atrapadas. Cuando se aleja la barra, el conductor conserva la carga negativa.

¿Y si la conexión a tierra se conserva después de que la barra ya se ha alejado? En tal caso los electrones tendrán una trayectoria para salir del conductor. Dado que los

electrones se repelen y tratan de alejarse lo más posible unos de otros, pasarán a la tierra para dispersarse aún más. De este modo el conductor queda neutro.

*LECCIÓN*

Las cargas pueden moverse en un material conductor. Los conductores conectados a tierra no necesariamente son neutros; pueden tener cualquier carga.

## 8.1 FUERZAS ELÉCTRICAS

Dos objetos cualesquiera cargados crean una fuerza entre sí, del mismo modo que dos masas cualesquiera producen fuerzas de interacción mutua. La diferencia es que existen dos tipos de carga, positiva y negativa, por lo que la fuerza eléctrica puede ser de atracción o de repulsión. La magnitud de la fuerza eléctrica que dos cargas crean entre sí es

$$F_Q = \frac{kq_1q_2}{R^2}$$

donde $k = 9 \times 10^9$ N m$^2$/C$^2$, $q^1$ y $q^2$ son las cargas, y $R$ es la distancia entre ellas. Esto se conoce como la ley de Coulomb y la fuerza recibe el nombre de "fuerza de Coulomb". La carga suele representarse como $q$ o $Q$, pero si ambos símbolos se encuentran en el mismo problema, se refieren a dos cargas distintas.

Las cargas se miden en coulombs (C), con la carga de un protón individual igual a

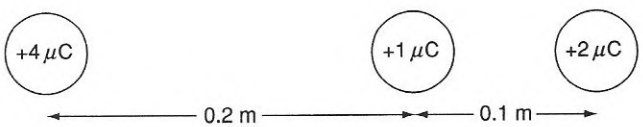
$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

de modo que un coulomb equivale a unos $6 \times 10^{18}$ protones o electrones. La carga de un electrón es $-e$. Como $g$, $e$ es una cantidad que no es en sí misma negativa; es la magnitud de la carga del protón o del electrón.

Analizamos las fuerzas eléctricas como procederíamos con cualquier otra fuerza. Trazamos el diagrama de cuerpo libre, elegimos los ejes y sumamos las fuerzas. Hasta este punto, sólo había una fuerza que podía actuar sobre un objeto sin estar contacto con él: la gravedad. Ahora veamos las fuerzas eléctricas, que también actúan sin estar contacto.

**EJEMPLO**

Encuentre la fuerza eléctrica total sobre la carga intermedia (+1 $\mu$C).



La carga de +4 $\mu$C y la de +1 $\mu$C tienen el mismo signo, por lo que se repelen entre sí. La carga de 4 $\mu$C crea una fuerza sobre la carga de +1 $\mu$C que actúa hacia la derecha. La magnitud (tamaño) de esta fuerza es

$$F_4 = \frac{kq_1q_2}{d^2} = \frac{k(4\ \mu\text{C})(1\ \mu\text{C})}{(0.2\ \text{m})^2}$$

$$F_4 = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-6}\ \text{C})(1 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.2\ \text{m})^2}$$

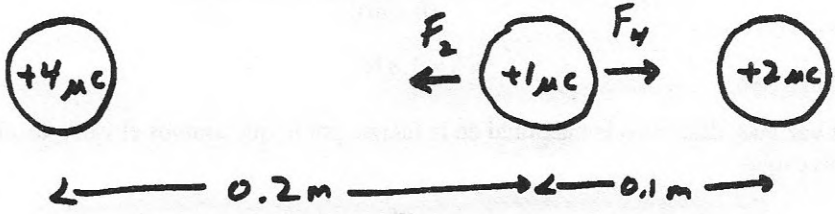
$$F_4 = 0.9\ \text{N}$$

La carga de +2 $\mu$C y la carga de +1 $\mu$C tienen el mismo signo, de modo que también se repelen. La carga de +2 $\mu$C crea una fuerza sobre la carga de +1 $\mu$C que actúa hacia la izquierda. La magnitud de esta fuerza es

$$F_2 = \frac{kq_1q_2}{d^2} = \frac{k(2\ \mu\text{C})(1\ \mu\text{C})}{(0.1\ \text{m})^2}$$

$$F_2 = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(2 \times 10^{-6}\ \text{C})(1 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.1\ \text{m})^2}$$

$$F_2 = 1.8\ \text{N}$$



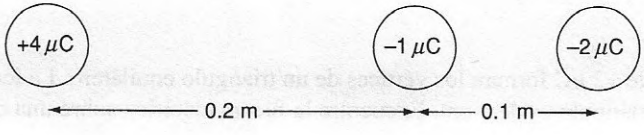

Podemos sumar las dos fuerzas considerando que el sentido positivo es a la derecha. La fuerza eléctrica total sobre la carga de +1 $\mu$C es

$$F = +F_4 - F_2 = +(0.9\ \text{N}) - (1.8\ \text{N}) = -0.9\ \text{N}$$

o 0.9 N hacia la izquierda. Aunque la carga de la izquierda es del doble de grande (¿el doble de potente y el doble de eléctrica?), también está al doble de la distancia y crea menor fuerza sobre la carga de en medio.

**EJEMPLO**

Encuentre la fuerza eléctrica total sobre la carga intermedia (– 1 $\mu$C).



La carga de +4 $\mu$C y la de –1 $\mu$C tienen signos opuestos, por lo que se atraen mutuamente. La carga de +4 $\mu$C crea una fuerza sobre la carga de – 1 $\mu$C que está dirigida hacia la primera, o hacia la izquierda. La magnitud de esta fuerza es

$$F_4 = \frac{kq_1q_2}{d^2} = \frac{k(4\ \mu\text{C})(1\ \mu\text{C})}{(0.2\ \text{m})^2}$$

$$F_4 = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-6}\ \text{C})(1 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.2\ \text{m})^2}$$

$$F_4 = 0.9\ \text{N}$$

¿Por qué no incluimos el signo de la carga de – 1 μC en la ecuación? Porque con la fórmula obtenemos la *magnitud* de la fuerza y utilizamos el diagrama para deducir el sentido.

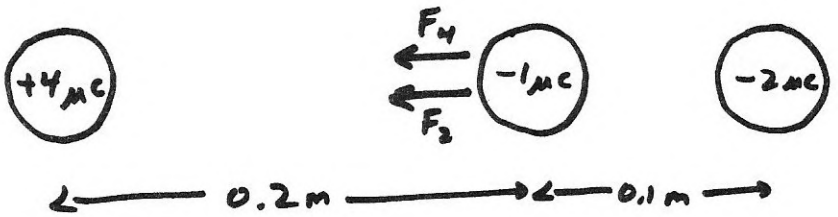
La carga de – 2 $\mu$C y la carga de – 1 $\mu$C tienen el mismo signo, de modo que se repelen. La carga de – 2 $\mu$C crea una fuerza sobre la carga de – 1 $\mu$C que se aleja de la primera (hacia la izquierda). La magnitud de esta fuerza es

$$F_2 = \frac{kq_1q_2}{d^2} = \frac{k(2\ \mu\text{C})(1\ \mu\text{C})}{(0.1\ \text{m})^2}$$

$$F_2 = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(2 \times 10^{-6}\ \text{C})(1 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.1\ \text{m})^2}$$

$$F_2 = 1.8\ \text{N}$$

Una vez más, deseamos la magnitud de la fuerza, por lo que usamos el valor absoluto de las cargas.



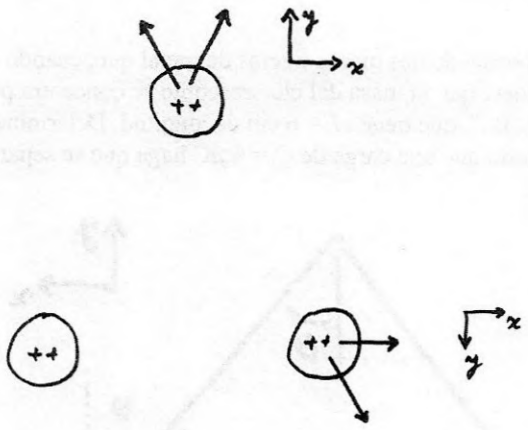

Considerando que el sentido positivo es hacia la derecha, la fuerza eléctrica total sobre la carga de – 1 $\mu$C es

$$F = -F_4 - F_2 = -(0.9\ \text{N}) - (1.8\ \text{N}) = -2.7\ \text{N}$$

o 2.7 N hacia la izquierda.

**EJEMPLO**

Tres cargas de +2 $\mu$C forman los vértices de un triángulo equilátero. La longitud de cada lado del triángulo es de 2 cm. Encuentre la fuerza eléctrica sobre una de las cargas.



Dado que todas las cargas son positivas, todas ellas se repelen entre sí. Podemos encontrar la fuerza sobre cualquiera de las cargas debido a la simetría: si la figura se hace girar 120° todo luce igual. La figura ilustra las fuerzas sobre dos de las cargas y dos sistemas de coordenadas posibles.

Encontremos las fuerzas sobre la carga de arriba, en las direcciones $x$ y $y$.

$$F_Q = \frac{kq_1q_2}{d^2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2)(2\ \mu\text{C})(2\ \mu\text{C})}{(0.02 \text{ m})^2} = 90 \text{ N}$$

$$F_x = +F_Q \cos 60^\circ - F_Q \cos 60^\circ = 0$$

$$F_y = +F_Q \operatorname{sen} 60^\circ + F_Q \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$F_y = 2F_Q \operatorname{sen} 60^\circ = 2(90 \text{ N}) \operatorname{sen} 60^\circ = 156 \text{ N}$$

La fuerza sobre la carga de arriba es de 156 N hacia arriba.

Encontremos ahora las fuerzas sobre la carga inferior de la derecha en las direcciones $x$ y $y$.

$$F_x = +F_Q + F_Q \cos 60^\circ = 135 \text{ N}$$

$$F_y = +F_Q \operatorname{sen} 60^\circ = 78 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(135 \text{ N})^2 + (78 \text{ N})^2} = 156 \text{ N}$$

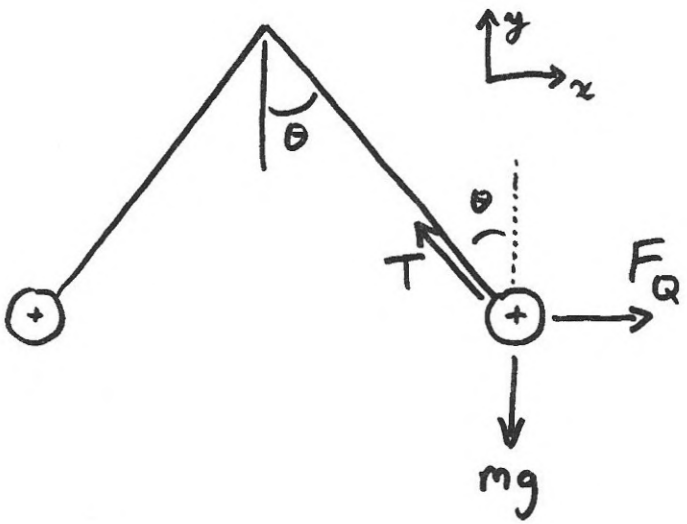
La fuerza sobre la carga inferior de la derecha también es de 156 N.

*LECCIÓN*

Utilice la fórmula para encontrar la magnitud y el diagrama para determinar el sentido de las fuerzas eléctricas, como haría en el caso de cualquier otra fuerza.

**EJEMPLO**

Un electroscopio consta de dos piezas ligeras de metal que, cuando se cargan, se repelen entre sí. Considere que la masa del electroscopio se concentra por completo en los extremos de las "hojas", que tienen $L = 6$ cm de longitud. Determine la masa necesaria de cada hoja de modo que una carga de $Q = 4\ \mu$C haga que se separen 40°.




Comencemos con el diagrama de cuerpo libre: cada hoja tiene masa y carga, así que actúan fuerzas gravitacionales y eléctricas. Hay también una tensión $T$ lo largo de la hoja. No hay aceleración, por lo que elegimos los ejes de modo que se facilite la división de las fuerzas en componentes.

$$F = ma$$
$$+F_Q - T \operatorname{sen} 40^\circ = ma_x = 0$$
$$-mg + T \cos 40^\circ = ma_y = 0$$

Deseamos despejar la masa, pero no conocemos la tensión. Podríamos calcularla con la ecuación para $x$ si conociéramos la fuerza eléctrica. Podemos encontrar esta última a partir de las cargas. La carga del electroscopio se divide, y la mitad va a cada hoja.

$$F_Q = \frac{k(Q/2)^2}{R^2} = \frac{k(Q/2)^2}{(2L \operatorname{sen} 40^\circ)^2}$$

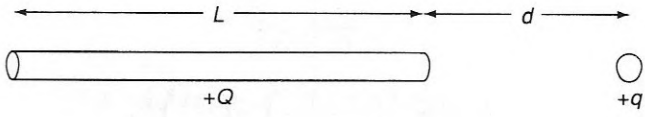
$$T = \frac{F_Q}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{kQ^2}{4 \times 4L^2(\operatorname{sen} 40^\circ)^3}$$

$$mg = T \cos 40^\circ = \frac{kQ^2}{16L^2} \frac{\cos 40^\circ}{(\operatorname{sen} 40^\circ)^3}$$

$$m = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(4\ \mu\text{C})^2}{16(9.8\ \text{m/s}^2)(0.06\ \text{m})^2} \frac{\cos 40^\circ}{(\operatorname{sen} 40^\circ)^3} = 0.74\ \text{kg}$$

**EJEMPLO***

Una carga $+Q$ se distribuye de manera uniforme en una barra con longitud $L$. Hay una segunda carga $q$ en la línea de la barra a una distancia $d$ de su extremo más cercano. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre la carga $q$?

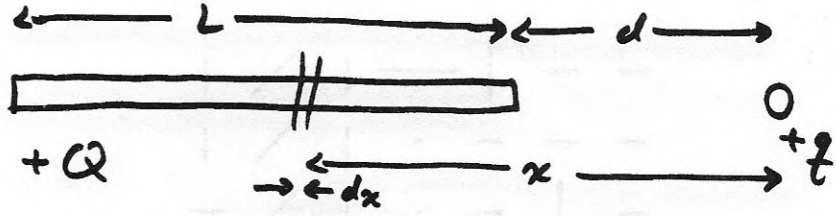



Nos gustaría usar la ley de Coulomb, pero ¿cuál es la distancia entre las cargas $q$ y $Q$? Podríamos hacer la medición desde la mitad de la barra, pero $1/R^2$ no es lineal, así que no podemos proceder de esta manera.

Podríamos dividir la barra en dos, encontrar la fuerza para cada mitad y sumarlas (como vectores, pero cada mitad crea una fuerza hacia la derecha).

$$F = \frac{k(Q/2)q}{[d + (L/4)]^2} + \frac{k(Q/2)q}{[d + (3L/4)]^2}$$

Esto constituiría una mejor aproximación. Podríamos dividir la barra en tres partes para obtener un resultado más exacto, o en cuatro o más. Queremos dividir la barra en partes tan pequeñas que podamos decir que toda la carga de cada fragmento está a la misma distancia de la carga $q$. Esto es, deseamos dividir la barra en una cantidad infinita de fragmentos infinitamente pequeños, encontrar la fuerza para cada fragmento y sumar las fuerzas. Esto suena como una integral.




Necesitamos conocer la distancia de cada fragmento a la carga $q$. Emplearemos el símbolo $x$ para esta distancia, y $x$ variará desde un mínimo $d$ hasta un máximo $d + L$. La anchura de cada fragmento es entonces $dx$, la distancia de cada parte de la barra a la siguiente. Elegir un modo de dividir un objeto en fragmentos y describir cada fragmento por medio de una variable suele ser la parte más difícil de cualquier problema con integrales. La fuerza que cada fragmento de la barra ejerce sobre $q$ es

$$F = \frac{k\,(\text{carga del fragmento})q}{(\text{distancia al fragmento})^2}$$

También necesitamos conocer la carga en cada fragmento. Si el tamaño del fragmento $dx$ es 1/100 de $L$, entonces la carga es 1/100 de $Q$. El tamaño de cada fragmento es $dx/L$ de la longitud, por lo cual la carga de cada fragmento es $dx/L$ de la carga, o $Q(dx/L)$.

Otra manera de verlo es en términos de densidad. La densidad de carga a lo largo de la barra es $\lambda = Q/L$. La carga en un fragmento de longitud $dx$ es $(Q/L)dx$.

$$F = \int_d^{d+L} \frac{k(Q\,dx/L)q}{(x)^2} = \frac{kQq}{L}\int_d^{d+L} \frac{dx}{(x)^2}$$

$$F = \frac{kQq}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_d^{d+L}$$

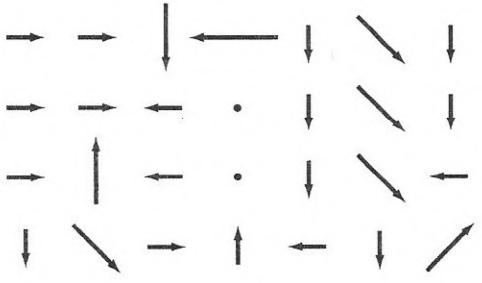
$$F = \frac{kQq}{L}\left[\left(-\frac{1}{d+L}\right) - \left(-\frac{1}{d}\right)\right]$$

$$F = \frac{kQq}{L}\left(\frac{L}{d(d+L)}\right) = \frac{kQq}{d(d+L)}$$

¿Esta expresión tiene las unidades correctas? Coulombs por coulombs por $k$, divididos entre metros por metros, da newtons.

## 8.2 CAMPOS ELÉCTRICOS

Las fuerzas eléctricas guardan una estrecha relación con los campos eléctricos. En matemáticas, un campo es un vector en cada punto del espacio. Cuando hablamos de la altitud de un terreno, queremos decir que, en un punto dado del entorno bidimensional (norte-sur, este-oeste), el terreno tiene una altura, medida por lo general con respecto al nivel del mar. Imagine que en cada punto del terreno tenemos ahora un vector: eso sería un campo.



En la sección anterior señalamos que las cargas producen fuerzas sobre otras cargas. Eso fue una simplificación. Las cargas crean un campo eléctrico y el campo eléctrico crea fuerzas sobre las cargas. Antes necesitamos un modo de encontrar la dirección y la magnitud de la fuerza eléctrica. Ahora necesitamos un modo de encontrar la dirección y la magnitud del campo eléctrico, así como la dirección y la magnitud de la fuerza que el campo eléctrico produce sobre una carga.

Comencemos con la segunda parte. La fuerza eléctrica que actúa sobre una carga es

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

donde $\boldsymbol{E}$ es el campo eléctrico en el punto en que se encuentra la carga. Si $q$ es positiva, entonces $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ apuntan en el mismo sentido. Si $q$ es negativa, entonces $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ apuntan en sentidos opuestos.

Ahora podemos trabajar la primera parte. Si tenemos dos cargas positivas, se repelen entre sí: la fuerza sobre la segunda tiene sentido opuesto a la primera. Pero la fuerza sobre la segunda tiene el mismo sentido que el campo en ese lugar, de modo que el campo en la posición de la segunda carga tiene el sentido opuesto a la primera carga. Si repetimos esto para una carga negativa y una positiva, el campo apunta hacia la carga negativa. El campo es

$$E = \frac{F}{q} = \frac{kQ_1Q_2/R^2}{Q_2} = \frac{kQ}{R^2}$$

He aquí cuatro maneras en que podría encontrarse un campo eléctrico:

- Encontrar el campo a partir de cada carga individual y sumar los campos (como vectores).
- Tomar la fuerza que actúa sobre una carga y dividir entre la carga para encontrar el campo.
- Si hay mucha simetría, emplear la ley de Gauss (capítulo siguiente).
- Encontrar el campo eléctrico a partir del potencial eléctrico (capítulo 10).

**EJEMPLO**

Un electrón en un campo eléctrico experimenta una aceleración de $1.2 \times 10^{16}$ m/s$^2$ hacia el norte. ¿Cuál es el campo eléctrico que causa esta aceleración?

La segunda ley de Newton establece que $F = ma$, pero la única fuerza proviene de un campo eléctrico.

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{m}{q}\boldsymbol{a} = \frac{m}{(-e)}\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}{(-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})}(1.2 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2\ \widehat{\textbf{norte}})$$

donde $\widehat{\textbf{norte}}$ es un vector unitario (con magnitud de uno y sin unidades) dirigido hacia el norte.

$$\boldsymbol{E} = (6.8 \times 10^4\ \text{N/C})(-\widehat{\textbf{norte}})$$

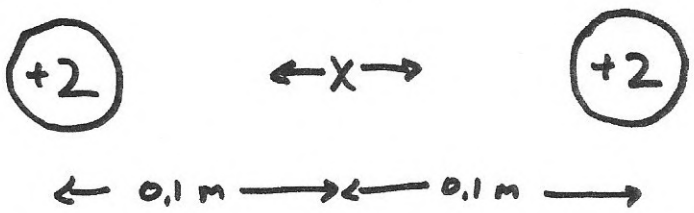
$$\boldsymbol{E} = 6.8 \times 10^4\ \text{N/C}\ \widehat{\textbf{sur}}$$

Dado que la carga que experimenta el campo es negativa, el campo que crea la fuerza y la fuerza tienen sentidos opuestos.

Las unidades de campo eléctrico son newtons por coulomb (N/C). Una carga en un campo de 12 N/C experimenta 12 newtons de fuerza por cada coulomb de carga que posee.

**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo eléctrico a la mitad de la distancia entre dos cargas de +2 $\mu$C separadas 20 cm?




Las cargas positivas crean un campo eléctrico que parte de ellas. Así, la carga de la izquierda crea un campo eléctrico que parte de ella (se dirige hacia la derecha). La carga de la derecha crea un campo que parte de ella (se dirige hacia la izquierda). El campo eléctrico total es

$$E = + \frac{k\,(2\ \mu c)}{(0.1\ \text{m})^2} - \frac{k\,(2\ \mu c)}{(0.1\ \text{m})^2} = 0$$

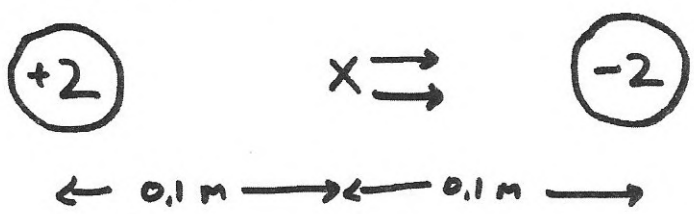
Los campos tienen la misma magnitud y sentidos opuestos, de modo que se cancelan.

*LECCIÓN*

Siempre que sume vectores, utilice el diagrama para deducir el sentido y la fórmula para calcular la magnitud, como lo hicimos en el caso de las fuerzas.

**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo eléctrico a la mitad de la distancia entre una carga de +2 $\mu$C y una carga de – 2 $\mu$C separadas 20 cm?




Las cargas positivas crean un campo eléctrico que parte de ellas. Así, la carga de la izquierda crea un campo eléctrico que parte de ella (se dirige hacia la derecha). Las cargas negativas crean un campo eléctrico que se dirige hacia ellas mismas. Así, la carga de la derecha crea un campo que va hacia ella (se dirige hacia la derecha). El campo eléctrico total es

$$E = + \frac{kq}{R^2} + \frac{kq}{R^2}$$

$$E = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(2 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.1\ \text{m})^2} + \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(2 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.1\ \text{m})^2}$$

$$E = +3.6 \times 10^6\ \text{N/C}$$

donde el sentido positivo es hacia la carga negativa. ¿Por qué usamos $+2 \times 10^{-6}$ tanto para la carga positiva como para la negativa? La fórmula $kq/R^2$ nos dice sólo la magnitud del campo eléctrico. Utilizamos el diagrama para determinar el sentido, como siempre lo hemos hecho con los diagramas de cuerpo libre.

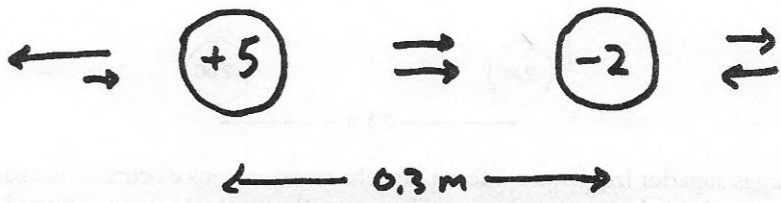
*LECCIÓN*

El campo eléctrico va de las cargas positivas hacia las negativas.

Dado que el campo eléctrico y la fuerza eléctrica son tan similares y los cálculos son casi los mismos, ¿por qué nos ocupamos tanto del campo eléctrico? Los campos eléctricos pueden tener otros efectos entre el momento en que son creados y cuando actúan sobre una carga. Asimismo, existen algunos tipos de cálculos que sólo son posibles mediante campos eléctricos. Veremos más de ellos próximamente.

**EJEMPLO**

Una carga de $+5\ \mu C$ y una carga de $-2\ \mu C$ están separadas 30 cm. ¿Dónde es igual a cero el campo eléctrico (que no sea a una distancia infinita)?




¿Dónde podría ser cero el campo eléctrico? En cualquier punto del espacio que no esté sobre la línea que une las cargas, los campos creados por las dos cargas no serán colineales y no sumarán cero. Entre las dos cargas, ambos campos eléctricos tendrán sentido hacia la derecha, como en el ejemplo anterior. El único lugar donde el campo eléctrico podría ser cero es en la línea que une las cargas pero está fuera de las cargas.

A la izquierda de la carga de $+5\ \mu C$, esta carga es más grande y más cercana, de modo que creará un campo eléctrico más fuerte que la carga de $-2\ \mu C$, por lo que los campos no sumarán cero. A la derecha de la carga de $-2\ \mu C$, la carga de $+5\ \mu C$ es mayor pero la carga de $-2\ \mu C$ es más cercana, de modo que es posible que los campos tengan la misma magnitud y sumen cero.

$$E = +\frac{k(5\ \mu C)}{(30\ cm + x)^2} - \frac{k(2\ \mu C)}{(x)^2} = 0$$

$$\frac{5}{(30\ cm + x)^2} = \frac{2}{(x)^2}$$

$$5(x)^2 = 2(30\ cm + x)^2$$

$$\sqrt{5}\,(x) = \sqrt{2}\,(30\text{ cm} + x)$$

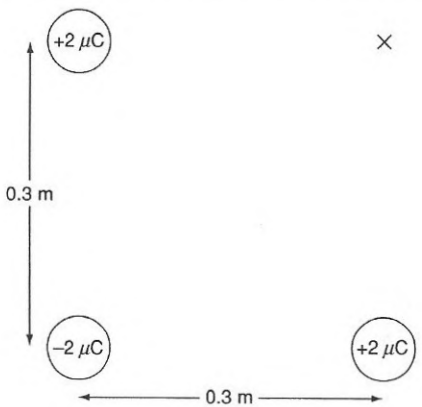
$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})x = \sqrt{2}\,(30\text{ cm})$$

$$x = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right)(30\text{ cm}) = 52\text{ cm}$$

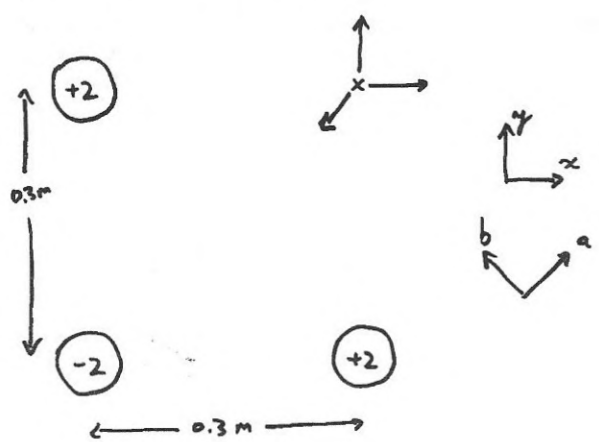
Hay un punto 52 cm a la derecha de la carga de $-2\ \mu$C donde el campo eléctrico es cero.

**EJEMPLO**

Dos cargas de $+2\ \mu$C y una de $-2\ \mu$C ocupan tres vértices de un cuadrado de 0.3 m de lado. Encuentre el campo eléctrico en el cuarto vértice del cuadrado.




Las cargas superior izquierda e inferior derecha crean campos eléctricos que parten de sí mismas, o hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente. La carga inferior izquierda crea un campo eléctrico hacia sí misma, o hacia abajo y a la izquierda. Deseamos sumar estos tres vectores de campo eléctrico, de modo que debemos elegir un par de ejes. Podríamos usar los ejes $x$ y $y$, o los ejes $a$ y $b$.



Primero, usando los ejes $x$ y $y$ (recuerde que $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$):

$$E_x = +\frac{kQ}{L^2} - \frac{kQ}{(\sqrt{2}L)^2}\cos 45° = \frac{kQ}{L^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$E_y = -\frac{kQ}{(\sqrt{2}L)^2}\cos 45° + \frac{kQ}{L^2} = \frac{kQ}{L^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

donde $Q = 2\ \mu$C y $L = 0.3$ m es la longitud de un lado del cuadrado. El campo eléctrico total es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$E = \sqrt{\left[\frac{kQ}{L^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2 + \left[\frac{kQ}{L^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2}$$

$$E = \sqrt{2}\left(\frac{kQ}{L^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$E = \left(\frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(2 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.3\ \text{m})^2}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$E = 1.8 \times 10^5\ \text{N/C}$$

Utilizando los ejes $a$ y $b$:

$$E_a = +\frac{kQ}{L^2}\cos 45° + \frac{kQ}{L^2}\cos 45° - \frac{kQ}{(\sqrt{2}L)^2}$$

$$E_b = -\frac{kQ}{L^2}\cos 45° + \frac{kQ}{L^2}\cos 45° = 0$$

$$E = \sqrt{E_a^2 + E_b^2} = E_a = \frac{kQ}{L^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)$$

$$E = \left(\frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(2 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.3\ \text{m})^2}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$E = 1.8 \times 10^5\ \text{N/C}$$

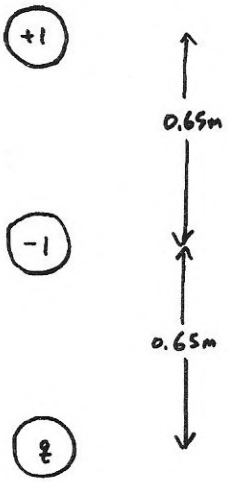
El problema tiene simetría: trace una diagonal desde la carga negativa hasta el cuarto vértice, y si invierte el diagrama se verá igual, de modo que la respuesta será la misma; así, el campo eléctrico debe estar en esa diagonal.

*LECCIÓN*

Para encontrar el campo, utilice las mismas técnicas vectoriales que emplearía para encontrar la fuerza.

**EJEMPLO**

Una carga de $+1\ \mu$C está 1.30 m arriba de una segunda carga $q$. Una tercera carga de $-1\ \mu$C flota a la mitad de la distancia entre las dos primeras cargas. La masa de la carga negativa es m = 0.004 kg. ¿Cuál es el valor de $q$?




Asignando el signo positivo al sentido ascendente, la fuerza en la carga negativa es

$$F = ma$$

$$+\frac{k(1\ \mu\text{C})(1\ \mu\text{C})}{(0.65\ \text{m})^2} - \frac{kq(1\ \mu\text{C})}{(0.65\ \text{m})^2} - mg = 0$$

Se elige ese signo para el segundo término porque si $q$ es positiva la fuerza tendrá sentido negativo. Si $q$ es negativa, la fuerza eléctrica tendrá sentido hacia arriba, pero entonces el término correspondiente en la ecuación será positivo. Así que podemos despejar $q$ en ésta y el signo de $q$ se revelará.

$$\frac{k(1\ \mu\text{C} - q)(1\ \mu\text{C})}{(0.65\ \text{m})^2} = mg$$

$$(1\ \mu\text{C} - q) = \frac{mg(0.65\ \text{m})^2}{k(1\ \mu\text{C})}$$

$$(1\ \mu\text{C} - q) = \frac{(0.004\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(0.65\ \text{m})^2}{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(1\ \mu\text{C})}$$

$$(1\ \mu\text{C} - q) = 1.84\ \mu\text{C}$$

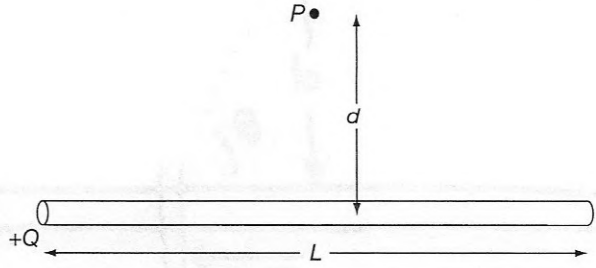
$$q = -0.84\ \mu\text{C}$$

La fuerza eléctrica procedente de la carga superior no es suficiente para sostener la carga intermedia, así que la fuerza eléctrica de la carga inferior es ascendente, o de repulsión.

Las fuerzas eléctricas sobre cargas pequeñas a menudo son mucho mayores que la fuerza gravitacional. Por tanto, solemos pasar por alto la gravedad en los problemas eléctricos. Si en un problema se especifica cuál es el sentido ascendente, entonces es probable que la gravedad sea una fuerza significativa; en caso contrario, lo más probable es que no lo sea.

**EJEMPLO***

Una carga $+Q$ se distribuye de manera uniforme en una barra con longitud $L$. El punto $P$ está a una distancia $d$ por encima del punto medio de la barra. ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto $P$?




Nos gustaría usar $E = kq/R^2$, pero no toda la carga está a la misma distancia del punto $P$. Podríamos dividir la barra en dos, encontrar el campo eléctrico para cada mitad y sumarlos (como vectores). Podríamos dividir la barra en tres partes para obtener un resultado más exacto, o en cuatro o más. Deseamos dividir la barra en partes tan pequeñas que podamos decir que toda la carga de cada fragmento está a la misma distancia del punto $P$. Dividiremos la barra en una cantidad infinita de fragmentos infinitamente pequeños, encontraremos el campo eléctrico para cada fragmento y sumaremos los vectores de campo eléctrico.

La magnitud del campo eléctrico que cada fragmento de la barra crea en $P$ es

$$E = \frac{k\,(\text{carga del fragmento})}{(\text{distancia a } P)^2}$$

Necesitamos conocer la distancia de cada fragmento al punto $P$ y la carga de cada fragmento.

Emplearemos el símbolo $x$ para la distancia del punto medio de la barra a un fragmento. Por lo tanto, $x$ variará desde un mínimo de $-L/2$ hasta un máximo de $+L/2$. La anchura de cada fragmento es entonces $dx$, la distancia de un fragmento de la barra al siguiente. La distancia de cada fragmento a $P$ es

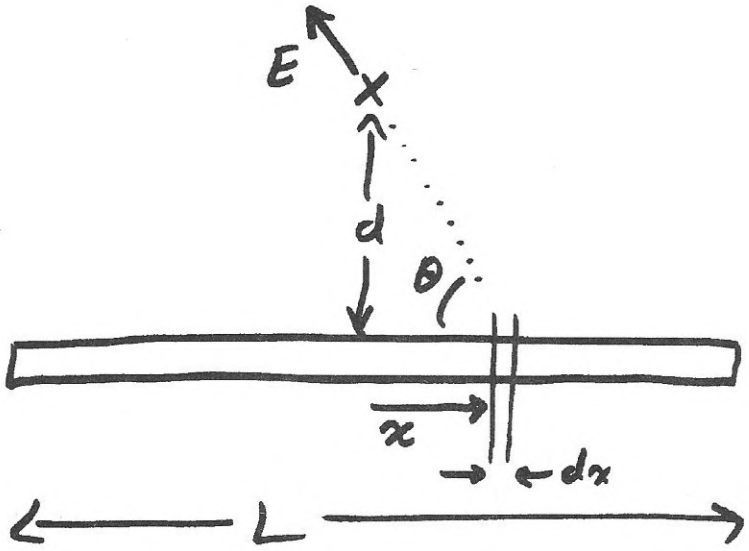
$$R = \sqrt{d^2 + x^2}$$

También necesitamos conocer la carga en cada fragmento. Si el tamaño del fragmento $dx$ es 1/100 de $L$, entonces la carga es 1/100 de $Q$. El tamaño de cada fragmento es $dx/L$ de la longitud, por lo que la carga de cada fragmento es $dx/L$ de la carga, o $Q(dx/L)$. De manera alternativa, la densidad de carga a lo largo de la barra es $\lambda = Q/L$ y la carga en un fragmento de longitud $dx$ es $(Q/L)dx$.

La componente vertical del campo eléctrico en $P$ es

$$E_y = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{k(Q\,dx/L)}{(\sqrt{(d^2 + x^2)^2}} \operatorname{sen}\theta$$

donde $\theta$ es el ángulo indicado en la figura. (La componente horizontal es cero, debido a la simetría del problema.) Al parecer tenemos que encontrar el ángulo $\theta$ para cada




fragmento de la barra. Pero no necesitamos $\theta$, sino sen $\theta$. En la figura tenemos un triángulo rectángulo que incluye el ángulo $\theta$, de modo que

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{d}{(\sqrt{d^2 + x^2})}$$

$$E_y = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{k(Q\,dx/L)}{(\sqrt{d^2 + x^2})^2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}} = \frac{kQd}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(\sqrt{d^2 + x^2})^3}$$

$$E_y = \frac{kQd}{L} \left[ \frac{x}{d^2\sqrt{d^2 + x^2}} \right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$E_y = \frac{kQd}{L} \left[ \left( \frac{(L/2)}{d^2\sqrt{d^2 + (L/2)^2}} \right) - \left( \frac{-(L/2)}{d^2\sqrt{d^2 + (-L/2)^2}} \right) \right]$$

$$E_y = \frac{kQ}{d\sqrt{d^2 + (L/2)^2}}$$

## 8.3 FUERZAS MAGNÉTICAS

Las cargas crean un campo eléctrico y el campo eléctrico produce fuerzas sobre las cargas. Las cargas eléctricas en movimiento crean un campo magnético y el campo magnético produce fuerzas sobre las cargas en movimiento. Cuando muchas cargas se mueven en el mismo sentido, llamamos a esto una corriente. La corriente se mide en amperes,

$$1\text{ A} = \text{C/s}$$

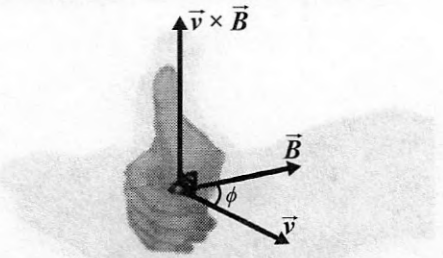
y el campo magnético se mide en teslas,

$$1\ \text{T} = 1\ \text{N/A m} = 1\ \text{N s/C m}$$

Dado que la corriente consta de cargas en movimiento, la corriente crea un campo magnético. Necesitamos un método para encontrar la dirección y la magnitud del campo magnético, así como la dirección y la magnitud de la fuerza que el campo magnético genera.

Una vez más, comencemos por la segunda parte. La fuerza magnética sobre una carga en movimiento siempre es perpendicular al campo magnético y siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula cargada. Imagine un protón que se mueve hacia afuera de la página en un campo magnético que apunta de izquierda a derecha. ¿Hay alguna dirección que de manera simultánea sea perpendicular tanto al sentido hacia afuera de la página como al sentido hacia la derecha? Sólo hacia arriba de la página y hacia abajo de la página. Observe que todo problema en que intervenga un campo magnético es tridimensional.

Para determinar si la fuerza magnética tiene sentido hacia adentro de la página o hacia afuera, coloque la mano derecha de modo que los dedos apunten hacia afuera de la página (como en la figura). Mantenga los dedos apuntando hacia afuera de la página y gire la mano de manera que ésta dé hacia la derecha; doble los dedos a la derecha. ¿Hacia adónde apunta el pulgar? Hacia arriba de la página.




Trazar un vector sobre la página o a la derecha es fácil, pero trazar uno que se dirija hacia adentro o afuera de la página lo es menos. Para describir un vector que sale de la página utilizamos la punta de una flecha que viene hacia nosotros (el símbolo ⊙), como en una película tridimensional. Para describir un vector que entra en la página utilizamos las plumas de la parte posterior de la flecha que se aleja de nosotros (el símbolo ⊗ o ×).

La fuerza magnética es

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

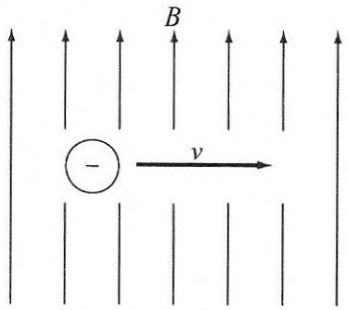
donde $\boldsymbol{B}$ es el campo magnético en el punto en que se encuentra la carga. El símbolo × significa "producto cruz"; el producto cruz de dos vectores es un tercer vector perpendicular a los dos originales. Utilizamos la "regla de la mano derecha" para encontrar la dirección y el sentido, como antes. La magnitud del producto cruz es la magnitud del primer vector por la magnitud del segundo vector por el seno del ángulo entre ellos. Así que usaremos con frecuencia la ecuación

$$F = qvB \operatorname{sen} \theta$$

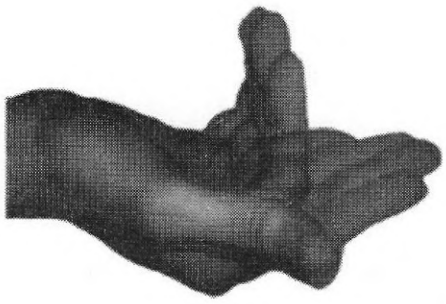
Si $q$ es negativa, el sentido de la fuerza magnética se invierte. Asimismo, si $v$ y $B$ son paralelos, entonces el ángulo entre ellos es cero y no hay fuerza magnética.

**EJEMPLO**

Un electrón viaja por el papel de izquierda a derecha. Hay un campo magnético que sube por la página (una dirección que no equivale al norte). ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre el electrón?




Coloque horizontal la mano derecha, con los dedos hacia la derecha. Manteniendo los dedos en esa dirección, gire la mano hasta tener la palma hacia arriba. Ahora doble los dedos hacia arriba. ¿Hacia adónde apunta el pulgar? Debe apuntar hacia afuera de la página.

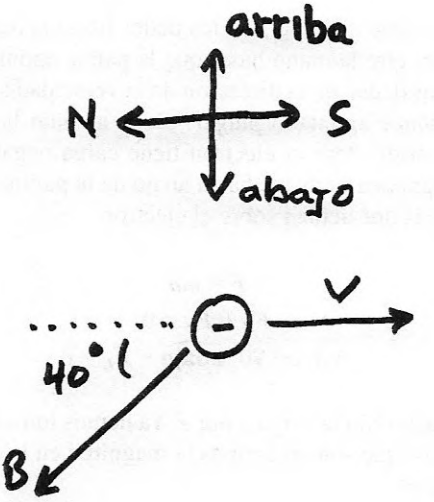


Pero el electrón tiene carga negativa, lo cual invierte el sentido. La fuerza magnética se dirige hacia adentro de la página.

**EJEMPLO**

Un electrón viaja horizontalmente hacia el sur a razón de $2 \times 10^5$ m/s. Hay un campo magnético de 0.04 T dirigido hacia el norte y a 40° por debajo de la horizontal. ¿Cuál es la fuerza magnética ejercida sobre el electrón?

Coloque horizontal la mano derecha, con los dedos hacia la derecha (que equivale al sur en este problema). Manteniendo los dedos en esa dirección, gire la mano hasta tener la palma hacia abajo. Ahora doble los dedos de la dirección de la velocidad a la dirección del campo magnético (nunca en el orden inverso). ¿Hacia dónde apunta el pulgar? Debe apuntar hacia adentro de la página. Pero el electrón tiene carga negativa, lo cual invierte el sentido. La fuerza magnética se dirige hacia afuera de la página, que representa el oeste en este ejemplo.




La magnitud de la fuerza magnética es

$$F = qvB \text{ sen } \theta$$

$$F = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2 \times 10^5 \text{ m/s})(0.04 \text{ T}) \text{ sen } 140° = 8.2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

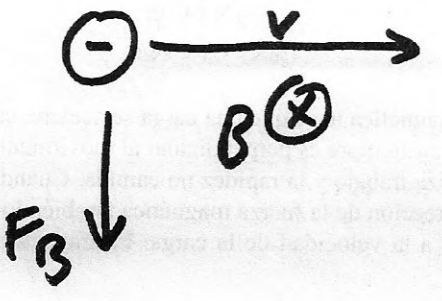
Podríamos haber usado 40° y el resultado habría sido el mismo.

*LECCIÓN*

Utilice la regla de la mano derecha para encontrar la dirección y el sentido de la fuerza magnética, y la fórmula para encontrar la magnitud, como siempre.

**EJEMPLO**

Un electrón viaja horizontalmente hacia la derecha a $2 \times 10^5$ m/s. Hay un campo magnético de 0.04 T que apunta hacia adentro de la página. ¿Qué campo eléctrico podría aplicarse al electrón para que su aceleración fuera cero?



Coloque horizontal la mano derecha, con los dedos hacia la derecha. Manteniendo los dedos en esa dirección, gire la mano hasta que la palma apunte hacia el interior de la página. Ahora doble los dedos de la dirección de la velocidad a la dirección del campo magnético. ¿Hacia adónde apunta el pulgar? Debe apuntar hacia arriba de la página (que no equivale al norte). Pero el electrón tiene carga negativa, lo cual invierte el sentido. La fuerza magnética se dirige hacia abajo de la página.

Sumando las fuerzas que actúan sobre el electrón

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_E = 0$$
$$evB \text{ sen } 90^\circ \, \widehat{\textbf{abajo}} + \boldsymbol{F}_E = 0$$

Observe que hemos sustituido la carga $q$ por $e$. Ya hemos tomado en cuenta el signo de la carga del electrón, así que sólo queremos la magnitud en la ecuación.

La fuerza eléctrica es

$$\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$$
$$q\boldsymbol{E} = -evB \text{ sen } 90^\circ \, \widehat{\textbf{abajo}}$$
$$q\boldsymbol{E} = evB \, \widehat{\textbf{arriba}}$$
$$(-e)\boldsymbol{E} = evB \, \widehat{\textbf{arriba}}$$
$$\boldsymbol{E} = vB \, \widehat{\textbf{abajo}}$$

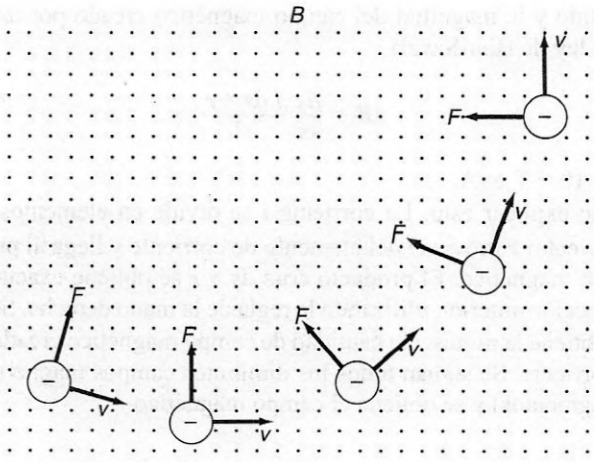
La fuerza magnética que actúan sobre el electrón tiene sentido hacia abajo, por lo que la fuerza eléctrica debe tener sentido hacia arriba para que las fuerzas se cancelen. A fin de hacer que una fuerza eléctrica sobre una carga eléctrica negativa se dirija hacia arriba, el campo eléctrico debe actuar hacia abajo.

$$\boldsymbol{E} = (2 \times 10^5 \text{ m/s})(0.04 \text{ T}) \, \widehat{\textbf{abajo}} = 8000 \text{ N/C} \, \widehat{\textbf{abajo}}$$

¿No está convencido de que m/s por T sea N/C? Cuando no puedo recordar a qué es igual una unidad (y eso suele pasarme con los teslas), comienzo con una ecuación que conozco bien y sustituyo las variables por sus unidades:

$$F = qvB$$
$$\text{N} = (C)\ (\text{m/s})\ (\text{T})$$
$$\text{T} = \text{N s/C m}$$
$$(\text{m/s}) \times \text{T} = \text{N/C}$$

Cuando una fuerza magnética hace que una carga se acelere, cambia la dirección pero no la rapidez. La fuerza siempre es perpendicular al movimiento, de modo que la fuerza magnética no realiza trabajo y la rapidez no cambia. Cuando la dirección de la velocidad cambia, la dirección de la fuerza magnética también lo hace de modo que siga siendo perpendicular a la velocidad de la carga. La trayectoria de la carga se curva formando un círculo.




**EJEMPLO**

Un electrón viaja de manera perpendicular a un campo magnético de 0.04 T a razón de $2 \times 10^5$ m/s. ¿Cuál es el radio de la trayectoria circular del electrón?

La única fuerza es la del campo magnético, de modo que

$$F = ma$$

$$qvB \text{ sen } 90^\circ = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$R = \frac{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(2 \times 10^5 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.04 \text{ T})}$$

$$R = 2.8 \times 10^{-5} = 28\ \mu\text{m}$$

*LECCIÓN*

Manipule las fuerzas magnéticas del mismo modo en que lo haría con cualesquiera otras fuerzas: trace el diagrama de cuerpo libre, sume los vectores de fuerza y utilice $F = ma$.

## 8.4 CAMPOS MAGNÉTICOS

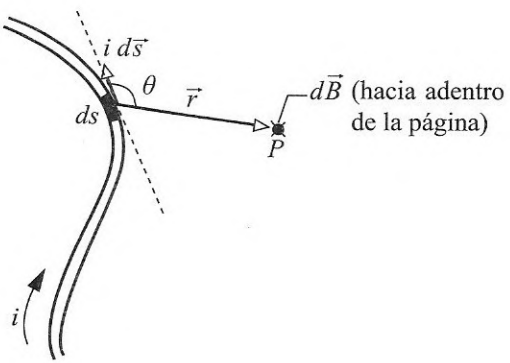
Las cargas en movimiento, o corrientes, crean campos magnéticos. Una sola carga en movimiento sólo crea un diminuto campo magnético, así que sólo nos interesaremos en los campos creados por corrientes. Necesitamos un método para determinar la di-

rección, el sentido y la magnitud del campo magnético creado por una corriente. Lo haremos con la ley de Biot-Savart.

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Aquí $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A.

Tratemos de explicar esto. La corriente $i$ se divide en elementos diminutos con longitud d$\boldsymbol{s}$. El vector $\boldsymbol{r}$ proviene del elemento de corriente y llega al punto donde buscamos el campo magnético. El producto cruz d$\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}$ se obtiene exactamente como lo hicimos en la sección anterior, utilizando la regla de la mano derecha. Se multiplica por lo demás y se obtiene la minúscula cantidad de campo magnético creada por ese ínfimo elemento de corriente. Se suman todos los diminutos campos magnéticos (hay infinidad de tales fragmentos) y se obtiene el campo magnético.




Encontrar los campos eléctricos no era tan complicado, al menos al principio. La diferencia es que cada elemento de corriente suele estar a una distancia distinta del punto de interés, de modo que debemos recurrir al cálculo.

**EJEMPLO***

Un alambre recto infinitamente largo conduce una corriente $i$. ¿Cuál es el campo magnético que esta corriente crea en el punto $P$ situado a una distancia $d$?

Cada elemento de corriente se encuentra a una distancia distinta del punto $P$. Necesitamos dividir el alambre en elementos tan pequeños que podamos decir que la totalidad de cada elemento está a la misma distancia del punto $P$. Dividiremos el alambre en un número infinito de elementos infinitamente pequeños, encontraremos el campo magnético para cada elemento y sumaremos los vectores de campo magnético.

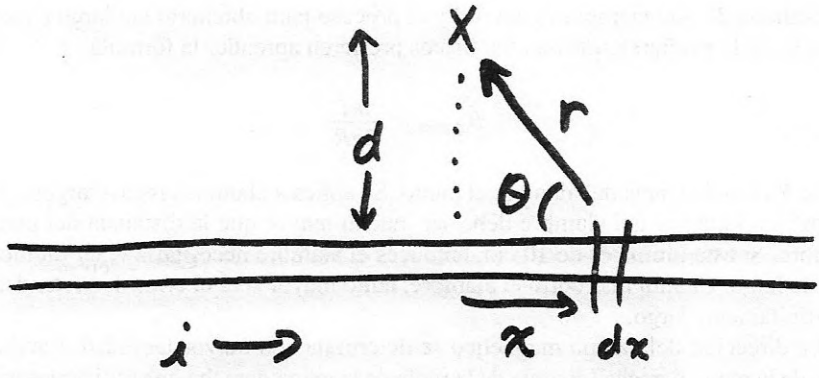
$$\boldsymbol{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Para cada elemento, el vector d$\boldsymbol{s}$ apunta hacia la derecha y el vector $\boldsymbol{r}$ apunta arriba y hacia la izquierda o la derecha.

$$\overrightarrow{\textbf{derecha}} \times (\overrightarrow{\textbf{arriba}} + \overrightarrow{\textbf{derecha}}) = (\overrightarrow{\textbf{derecha}} \times \overrightarrow{\textbf{arriba}}) + (\overrightarrow{\textbf{derecha}} \times \overrightarrow{\textbf{derecha}}) = \overrightarrow{\textbf{fuera}} + 0 = \overrightarrow{\textbf{fuera}}$$

Cada elemento de corriente crea un campo magnético que apunta hacia afuera de la página. Dado que todos los diminutos campos magnéticos tienen la misma dirección es fácil sumarlos y la magnitud del campo magnético es

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{ds\, r \operatorname{sen} \theta}{r^3}$$




Utilizaremos $x$ para la posición de cada diminuto elemento de corriente, midiendo a partir del punto medio del alambre (el punto más cercano al punto $P$). Así, $x$ variará de $-\infty$ a $+\infty$. La longitud de cada elemento es entonces $dx$, la distancia de un elemento del alambre al siguiente. La distancia de cada elemento a $P$ es

$$R = \sqrt{d^2 + x^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \theta\, dx}{(\sqrt{d^2 + x^2})^2}$$

No necesitamos $\theta$, sino sen $\theta$. En la figura tenemos un triángulo rectángulo que incluye el ángulo $\theta$, de modo que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i d}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{d^2 + x^2})^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 i d}{4\pi} \left[ \frac{x}{d^2 \sqrt{d^2 + x^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$B = \frac{\mu_0 i d}{4\pi} \left[ \left( \frac{(+\infty)}{d^2 \sqrt{d^2 + (+\infty)^2}} \right) - \left( \frac{(-\infty)}{d^2 \sqrt{d^2 + (-\infty)^2}} \right) \right]$$

Infinito más $d^2$ es infinito. La raíz cuadrada de $(\infty)^2$ es $\infty$, e $\infty$ entre $\infty$ es uno.

$$B = \frac{\mu_0 id}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{d^2}\right)+\left(\frac{1}{d^2}\right)\right]$$

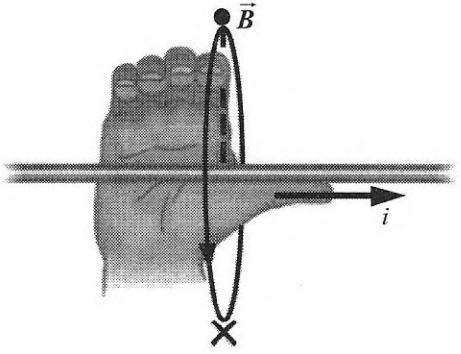
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

El resultado de este ejemplo es tan útil y el proceso para obtenerlo tan largo (o angustioso, si así lo prefiere), que aún los físicos prefieren aprender la fórmula

$$B_{\text{alambre}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

donde $R$ es la distancia del alambre al punto. Se aplica a alambres rectos largos. ¿Cuán largos? La longitud del alambre debe ser mucho mayor que la distancia del punto al alambre. Si esta última es de 10 cm, entonces el alambre necesitaría tener un metro o más de largo. Cuanto más corto el alambre, tanto mayor será el error de pretender que es infinitamente largo.

La dirección del campo magnético se determina con mayor facilidad usando una regla de la mano derecha (distinta de la regla de la mano derecha que utilizamos antes). El campo magnético forma lazos alrededor de la corriente: las líneas de campo eléctrico comienzan y terminan en las cargas, pero las líneas de campo magnético nunca terminan. ¿Cómo se distribuyen las líneas de campo magnético? Extienda la mano derecha y apunte con el pulgar en el sentido de la corriente, a la derecha en el último ejemplo. Doble los dedos. ¿Hacia adónde apuntan? Hacia afuera de la página arriba del alambre, hacia abajo enfrente del alambre, hacia adentro de la página abajo del alambre y hacia arriba detrás del alambre.

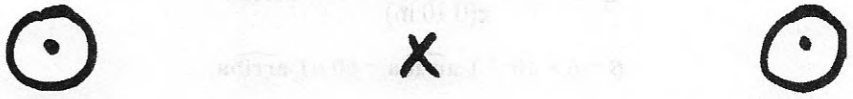



No es extraño que el sentido del campo magnético no sea un simple "arriba" o "hacia la izquierda". El sentido del campo eléctrico era "alejándose de la carga" o "hacia la carga", lo cual podía significar arriba o abajo dependiendo de dónde nos encontrábamos y dónde estaba la carga. La dirección y el sentido del campo magnético dependen de dónde estamos y de dónde está la corriente.

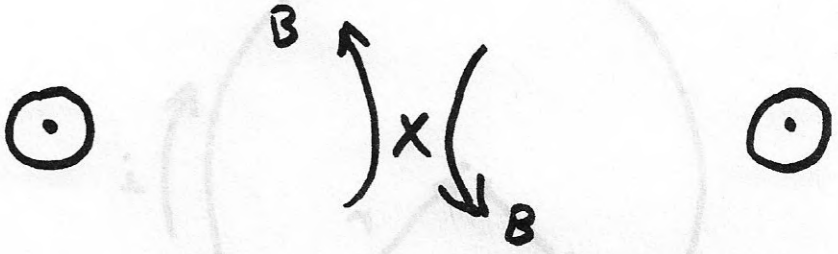
**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo magnético a la mitad de la distancia entre dos alambres separados 20 cm, cada uno de los cuales conduce una corriente de 15 A, si las corrientes fluyen a) en el mismo sentido y b) en sentidos opuestos?

Observemos los alambres de frente, donde las corrientes fluyen hacia afuera de la página.

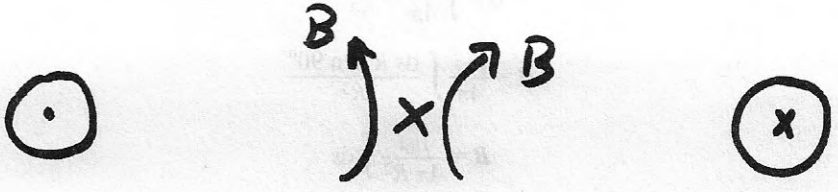


¿Cuál es el sentido del campo magnético creado por la corriente de la izquierda? Sostenga la mano derecha con el pulgar (la corriente) hacia usted. Doble los dedos; señalarán en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. El campo magnético rodea la corriente en el sentido contrario al reloj. A la mitad de la distancia entre los alambres este campo magnético se dirige hacia arriba de la página. Haga lo mismo para la corriente de la derecha y encontrará que el campo magnético se dirige hacia abajo de la página.




Ahora sumemos los dos vectores de campo magnético. Dado que cada alambre tiene la misma corriente y está a la misma distancia del punto, la magnitud de cada campo magnético es la misma. Apuntan en sentidos opuestos, así que uno tiene sentido positivo y otro tiene sentido negativo. Suman cero, de modo que no hay campo magnético en el punto intermedio entre los alambres.

¿Y si el alambre de la derecha llevara corriente hacia adentro de la página? Señale con el pulgar derecho en el sentido opuesto a usted y doble los dedos. Quedan en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que el campo magnético tiene el sentido del reloj alrededor de la corriente, o sea hacia arriba en el punto de interés.



El campo magnético es

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\text{izq}} + \boldsymbol{B}_{\text{der}}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\,\widehat{\textbf{arriba}} + \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\,\widehat{\textbf{arriba}} = \frac{2\mu_0 i}{2\pi R}\,\widehat{\textbf{arriba}}$$

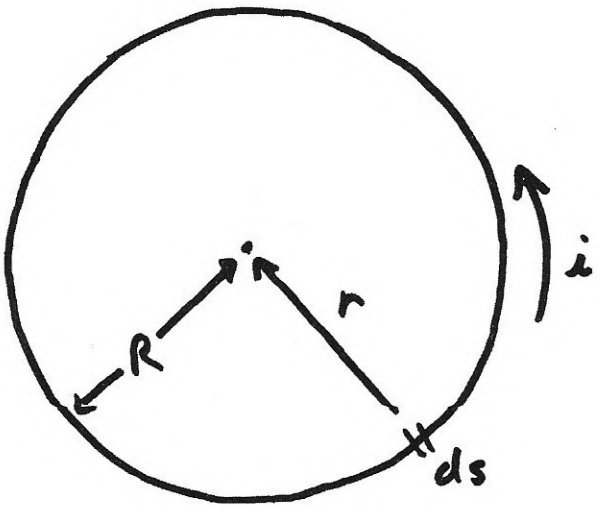
$$\boldsymbol{B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T m/A})(15\ \text{A})}{\pi(0.10\ \text{m})}\,\widehat{\textbf{arriba}}$$

$$\boldsymbol{B} = 6 \times 10^{-5}\ \text{T}\,\widehat{\textbf{arriba}} = 60\ \mu\text{T}\,\widehat{\textbf{arriba}}$$

Esta magnitud es aproximadamente igual a la del campo magnético terrestre.

**EJEMPLO***

Una corriente $i$ fluye en sentido contrario a las manecillas del reloj por una trayectoria cerrada de radio $R$. ¿Cuál es el campo magnético en el centro de la trayectoria cerrada?




Cada elemento de corriente está a la misma distancia del centro del círculo. La dirección del campo magnético creado por cada elemento es hacia afuera de la página. Además, d$\boldsymbol{s}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{r}$ para cada diminuto elemento de corriente.

$$\boldsymbol{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int \frac{ds\,R\ \text{sen}\ 90^\circ}{R^3}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\int ds$$

La variable $ds$ es la longitud de cada elemento diminuto y $\int ds$ es la suma de las longitudes de cada elemento. Esta suma es la longitud de la trayectoria cerrada, la circunferencia $2\pi R$.

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} 2\pi R$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

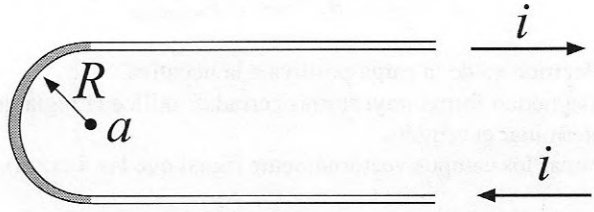
Si bien este resultado no es tan difícil de obtener como el anterior, es otra fórmula que muchos prefieren memorizar.

$$B_{\text{trayectoria cerrada}} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

Para obtener el sentido del campo magnético, se elige un punto en la trayectoria cerrada del alambre y se aplica la regla de la mano derecha: se dirige el pulgar en el sentido de la corriente y se doblan los dedos. De manera alternativa, se doblan los dedos en el sentido de la corriente (al contrario de las manecillas del reloj) y el pulgar apuntará en el sentido del campo magnético en el centro de la trayectoria cerrada (hacia afuera de la página). Ambos métodos funcionan, siempre que no se use la mano izquierda (lo cual se hace con mucha frecuencia cuando se tiene el lápiz en la mano derecha).

**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo magnético en el centro del arco? El arco tiene radio de 6 cm y el alambre conduce 5 A de corriente.




Dividimos la corriente en tres partes, encontramos el campo magnético para cada parte y sumamos los campos.

$$B = B_{\text{arriba}} + B_{\text{arco}} + B_{\text{abajo}}$$

La parte de arriba es la mitad de un alambre recto de longitud infinita. Si el pulgar apunta en el sentido de la corriente (hacia la derecha), los dedos se doblan hacia adentro de la página abajo del alambre. La parte de abajo también es la mitad de un alambre recto de longitud infinita. Si el pulgar apunta en el sentido de la corriente (hacia la izquierda), los dedos se doblan hacia adentro de la página arriba del alambre. El arco es la mitad de un círculo, el cual también crea un campo hacia adentro de la página.

$$B = \left(\frac{1}{2}\frac{\mu_0 i}{2\pi R} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 i}{2R} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 i}{2\pi R}\right) \widehat{\textbf{adentro}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}(1 + \pi + 1)\,\widehat{\textbf{adentro}}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T m/A})(5\ \text{A})}{4\pi(0.06\ \text{m})}(2 + \pi)\ \widehat{\textbf{adentro}}$$

$$\boldsymbol{B} = 4.3 \times 10^{-5}\ \text{T}\ \textbf{adentro} = 43\ \mu\text{T}\ \widehat{\textbf{adentro}}$$

*LECCIÓN*

Es difícil encontrar campos magnéticos utilizando la ley de Biot-Savart. Cuando se pueda, tratemos de usar los resultados que obtuvimos para $B_{\text{alambre}}$ y $B_{\text{trayectoria cerrada}}$.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- Las cargas crean un campo eléctrico, y un campo eléctrico produce fuerzas sobre las cargas.

$$Q \overset{E=KQ/R^2}{\rightarrow} E \overset{F=qE}{\rightarrow} F_{\text{eléctrica}}$$

- Las cargas en movimiento crean un campo magnético, y el campo magnético produce fuerzas sobre las cargas en movimiento.

$$I \overset{B=\mu_0 I/2\pi R}{\rightarrow} B \overset{F=qv\,B\cos\theta}{\rightarrow} F_{\text{magnética}}$$

- El campo eléctrico va de la carga positiva a la negativa.
- El campo magnético forma trayectorias cerradas; utilice la regla de la mano derecha para determinar el sentido.
- Recuerde sumar los campos vectorialmente (igual que las fuerzas).

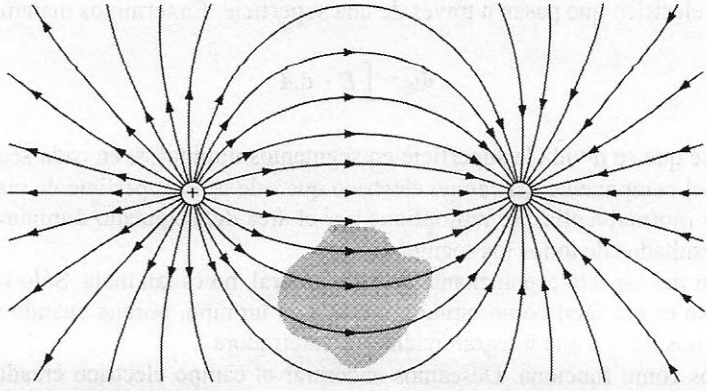
CAPÍTULO 9

# *MÁS SOBRE CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS*

En el capítulo anterior encontramos los campos eléctricos (y magnéticos) sumando los campos eléctricos individuales creados por cada carga. Si hubiera muchas cargas y no estuvieran a la misma distancia del punto de interés, la situación sería complicada. Puede usarse la ley de Gauss para simplificar algunos de estos casos.

A veces es útil visualizar los campos eléctricos o magnéticos con una serie de líneas. Para ello, se encuentra el campo eléctrico en un punto, se avanza un poco en esa dirección, se encuentra el campo eléctrico en el nuevo punto, y se continúa así hasta que termina la línea en una carga negativa. En el caso de un campo eléctrico constante se obtiene una serie de líneas rectas. Si el campo se debe a una sola carga positiva, el resultado es una serie de líneas que parten de la carga. A mayor densidad de "líneas de campo", mayor intensidad del campo, así que para una carga puntual (toda la carga en un solo punto), a mayor distancia respecto a la carga y a mayor espaciamiento entre las líneas, menor intensidad del campo.

En la figura se muestran las líneas de campo eléctrico para un par de cargas, una positiva y otra negativa. Las líneas de campo parten de la carga positiva, se alejan de ésta, se dirigen a la carga negativa y terminan en ésta. El número de líneas de campo que salen de la carga positiva es igual al número de las que terminan en la carga negativa porque tienen la misma cantidad de carga.



Ahora consideremos el área sombreada entre las dos cargas. ¿Cuál es la cantidad neta de líneas de campo eléctrico que salen de dicha área? Recuerde que una línea de cam-

po que entra equivale a una línea negativa que sale. El número total neto de líneas de campo que salen es cero: por cada línea que sale hay una que entra. El único modo de tener un exceso de líneas que salen sería que hubiera una fuente de líneas en esa área (una carga positiva). A mayor carga positiva en el área, más líneas creadas y más líneas que salen. De modo similar, la única manera de tener un número negativo de líneas que salen (entran más de las que salen) sería que hubiera un "sumidero" de líneas en esa área: una carga negativa.

La ley de Gauss establece que el número de líneas de campo eléctrico que salen de cualquier área sombreada es igual a la carga neta dentro de esa área. El truco consiste en usar el recuento de líneas de campo para determinar el campo eléctrico. Pueden aplicarse trucos similares en el caso de la ley de Ampere para los campos magnéticos.

## 9.1 LEY DE GAUSS*

La expresión matemática de la ley de Gauss es

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}$$

donde $\Phi_E$ es el flujo de campo eléctrico que sale del área, $q_{\text{neta}}$ es la carga neta dentro del área y $\epsilon_0$ es $1/4\pi k = 8.85 \times 10^{-12}$ C²/N m².

La ley de Gauss es válida para cualquier superficie cerrada. Una superficie cerrada es la que carece de salidas: si uno está dentro de la superficie y quiere salir debe atravesarla. No es necesario que la superficie sea real: imagine o invente cualquier superficie que desee y la ley de Gauss le dirá el número de líneas de campo eléctrico que salen.

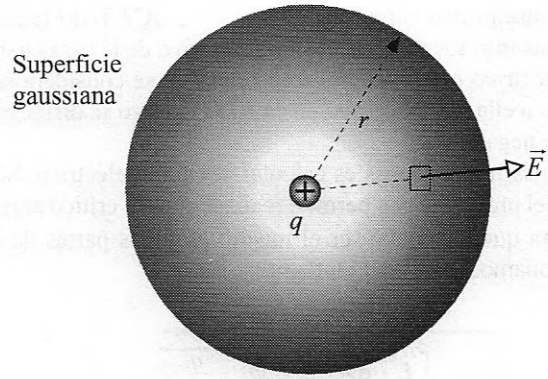
¿Qué es el flujo? Imagine que se encuentra bajo la lluvia sosteniendo un balde. El flujo sería el ritmo de entrada de gotas de lluvia en el balde. Usted podría reducir este ritmo usando un balde más pequeño, yendo a un lugar con menos lluvia o inclinando el balde. El flujo de campo eléctrico $\Phi_E$ es en realidad un recuento del número de líneas de campo eléctrico que pasan a través de una superficie. En términos matemáticos,

$$\Phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

lo cual dice que se divida la superficie en segmentos diminutos, en cada segmento se encuentre el componente del campo eléctrico que sale de la superficie de manera perpendicular (normal a ella), se multiplique por el área del segmento diminuto y se sumen los resultados de todos los segmentos.

A pesar del aspecto espeluznante de esta integral, no es tan mala. Sólo la resolvemos cuando es tan fácil como quitarle un dulce a un niño, porque cuando no es así, resolverla nos lleva a una integral mucho más aterradora.

Veamos cómo funciona. Deseamos encontrar el campo eléctrico creado por una sola carga puntual $q = +2\ \mu$C. ¿Cuál es el campo eléctrico a una distancia $r$? Podemos inventar cualquier superficie cerrada que deseemos para aplicar la ley de Gauss, así que emplearemos una esfera con centro en la carga $q$ y radio $r$ (como $r$ es una variable, puede tener cualquier valor).




Deseamos resolver la integral para encontrar el flujo. Para ello, necesitamos conocer el campo eléctrico en cada punto de nuestra superficie imaginaria. No conocemos el campo; es lo que tratamos de encontrar. Lo que sabemos es que el campo en un extremo de la esfera imaginaria es el mismo que en el otro extremo. Si elegimos dos puntos cualesquiera sobre la esfera, el campo eléctrico será el mismo. Debe ser así debido a la simetría del problema: se ve igual desde cualquier ángulo, así que el campo eléctrico es el mismo en cualquier ángulo.

En cualquier punto sobre nuestra esfera imaginaria, el campo eléctrico sale de la superficie perpendicularmente y tiene la misma magnitud. Debido a que el campo sale perpendicularmente

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = E\,\mathrm{d}A\cos 0^\circ = E\,\mathrm{d}A$$

Dado que el campo $E$ es el mismo en cualquier punto sobre nuestra superficie "gaussiana" imaginaria

$$\Phi_E = \int E\,\mathrm{d}A = E\int \mathrm{d}A$$

La integral que queda indica sumar el área de cada pieza diminuta, de modo que es igual al área de la superficie imaginaria.

$$\Phi_E = E\int \mathrm{d}A + E\,A$$

La ley de Gauss establece que el flujo es igual a la carga "encerrada" por la superficie imaginaria dividida entre $\epsilon_0$.

$$E\,A = \Phi_E = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}$$

Dado que la superficie es una esfera, el área es $4\pi r^2$.

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{\text{neta}}}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{q}{(4\pi\epsilon_0)r^2} = \frac{k(+2\ \mu\text{C})}{r^2}$$

Es lo mismo que obtuvimos en el capítulo anterior (¡fiuuu!).

¿Y si hubiéramos usado una carga negativa $q = -2\ \mu C$? Todo habría sido igual hasta el momento de sustituir los valores; el signo negativo de la carga habría dado por resultado un campo eléctrico negativo. El campo siempre se considera saliendo de la superficie, no entrando a ella, de modo que un campo negativo se dirige hacia adentro, es decir, hacia la carga negativa.

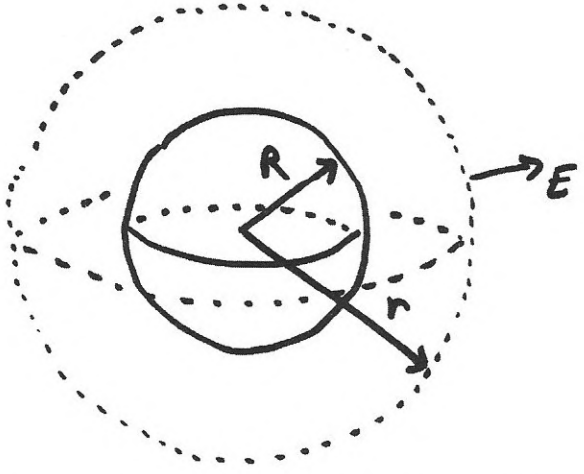
El objetivo de usar la ley de Gauss es calcular el campo eléctrico. Sólo podemos hacerlo si la simetría del problema nos permite realizar el paso crítico anterior. El campo eléctrico, cualquiera que sea, debe ser el mismo en todas partes de la superficie imaginaria para que podamos resolver la integral.

$$\overbrace{E\,A = \underbrace{\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}}_{\text{definición de flujo}}}^{\text{simetría}} = \overbrace{\Phi_E = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}}^{\text{ley de Gauss}}$$

**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo eléctrico a una distancia $r$ de una carga $Q$ distribuida de manera uniforme sobre una esfera de radio $R$?

La posibilidad de usar la ley de Gauss depende de que se disponga de una "buena" superficie imaginaria. Necesitamos una en la cual el campo eléctrico sea el mismo en cualquier punto, aunque no conozcamos ese campo. La carga tiene simetría esférica: podemos girarla como deseemos sobre el punto central y se verá igual. Por tanto, elegimos como nuestra superficie una esfera de radio $r$ con centro en la esfera de carga.




Ahora contamos con el poder de la simetría para que nos ayude a resolver la integral.

$$E\,A = \Phi_E = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}$$

La interrogante es cuánta carga está encerrada. Si $r \geq R$, entonces toda la carga está encerrada.

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{r^2}$$

Mientras el objeto tenga simetría esférica, el campo eléctrico es el mismo, como si se tratara de una carga puntual.

Si $r < R$ y estamos buscando el campo eléctrico en algún punto dentro de la esfera de carga, entonces sólo parte de la carga está encerrada. Si el volumen de la superficie imaginaria es la mitad del volumen de la esfera de carga, entonces contiene la mitad de la carga (ello se debe a que la carga se distribuye *de manera uniforme*). La carga encerrada por la superficie es entonces

$$q_{\text{neta}} = \frac{\text{volumen de la superficie}}{\text{volumen de la esfera}} Q = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} Q = \frac{r^3}{R^3} Q$$

$$E(4\pi r^2) = \left(\frac{r^3}{R^3} Q\right)\frac{1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{kQr}{R^3}$$

De modo que

$$E(r) = \begin{cases} kQr/R^3, & \text{para } r < R \\ kQ/r^2, & \text{para } r \geq R \end{cases}$$

Con fines de comparación, si hubiéramos intentado resolver el último ejemplo utilizando la técnica del capítulo anterior, dividiendo la esfera en un número infinito de segmentos diminutos, finalmente habríamos tenido que resolver la integral

$$E = \frac{3kQ}{2R^3} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} dt \, \frac{t^2(r - t \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta}{(r^2 + t^2 - 2rt \operatorname{sen}\theta)^{3/2}}$$

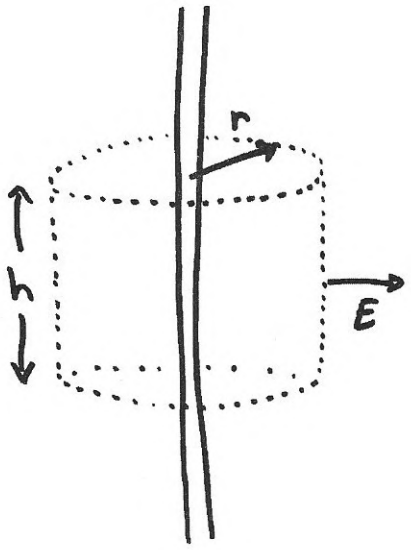
El objetivo de la ley de Gauss es sustituir una integral endemoniada por otra más sencilla. Sólo existen tres configuraciones geométricas cuya simetría nos permite hacer uso de la ley de Gauss.

**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo eléctrico creado por una línea de carga larga con densidad lineal uniforme $\lambda$ (carga por unidad de longitud)?

No podemos girar una línea sobre el punto central sin que cambie su aspecto. Pero sí podemos girarla sobre su eje y será la misma sin importar cuánto gire. Esto se deno-

mina simetría cilíndrica y elegimos un cilindro como nuestra superficie imaginaria. Nuestro cilindro tiene radio $r$ y altura (o longitud) $h$.




Dado que la superficie debe ser cerrada, el cilindro tiene una parte superior y una inferior. El campo eléctrico que desciende por la parte superior debido a la carga situada arriba de ella es igual al campo eléctrico que asciende a través de la parte inferior debido a la carga de abajo. De este modo, el flujo a través de las partes superior e inferior es cero. El campo eléctrico que atraviesa la superficie lateral es el mismo en todas partes.

$$E\,A = \Phi_E = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada por la superficie imaginaria es la densidad de carga (carga por unidad de longitud) multiplicada por la longitud incluida.

$$E(2\pi rh) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r}$$

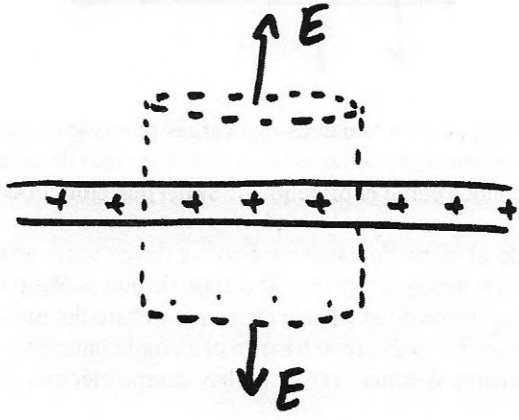
**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo eléctrico creado por un gran plano de carga con densidad $\sigma$ (carga por unidad de área)?

Con un plano de carga muy extenso, el campo eléctrico saldrá perpendicularmente del plano. Dado que todas las líneas de campo eléctrico son paralelas, la densidad de líneas de campo no cambia y la magnitud del campo eléctrico es la misma. ¿No se hará

más pequeño el campo a medida que nos alejemos de la carga? Mientras el plano sea mucho mayor que la distancia a él, el campo permanece constante.

Elegimos como nuestra superficie imaginaria un cilindro (una lata de refresco) tal que la superficie corte el cilindro en dos partes iguales. Dado que el campo se aleja perpendicularmente del plano, no hay flujo a través del lado curvo de la "lata". Ahí el campo no tiene una componente perpendicular a la superficie: la roza pero no la atraviesa.




El campo eléctrico a través de los extremos circulares es el mismo en todos los puntos del extremo. Asimismo, el campo es el mismo en ambos extremos.

$$E\,A = \Phi_E = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}$$

$$E(2a) = \Phi_E = \frac{a\sigma}{\epsilon_0}$$

Aquí $a$ es el área de cada extremo circular.

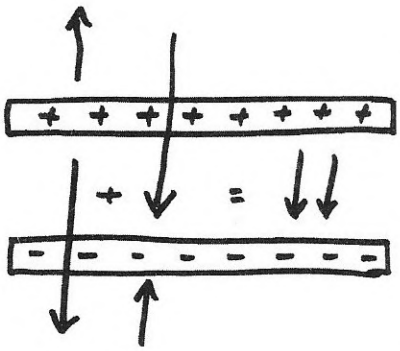
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

*LECCIÓN*

La ley de Gauss siempre se cumple, pero a fin de poder usarla para encontrar el campo eléctrico necesitamos que el problema presente simetría.

**EJEMPLO**

¿Cuál es el campo eléctrico entre dos planos de carga paralelos muy grandes? La densidad de carga del plano superior es $\sigma$ y la del inferior es $-\sigma$.



En el capítulo anterior, cuando teníamos dos cargas puntuales y deseábamos conocer el campo eléctrico, primero encontramos el campo eléctrico de cada carga y luego los sumamos. Esto se conoce como el principio de **superposición**. Podemos hacer lo mismo aquí.

El campo debido al plano de carga superior se dirige hacia arriba por encima del plano y hacia abajo por debajo del plano. El campo debido al plano inferior de carga se dirige hacia abajo por arriba de él y hacia arriba por debajo del plano. En cada caso, la magnitud del campo es $E = \sigma/2\epsilon_0$ (con base en el ejemplo anterior). Así, arriba y debajo de los planos los campos suman cero y no hay campo eléctrico. El campo eléctrico entre los planos es

$$E = E_{\text{superior}} + E_{\text{inferior}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Siempre que las líneas de campo procedentes de un plano van en ambos sentidos de uno y otro lado del plano, el campo es

$$E_{\text{ambos}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

pero cuando las líneas de campo van en un solo sentido (sólo hay campo en un lado), el campo es

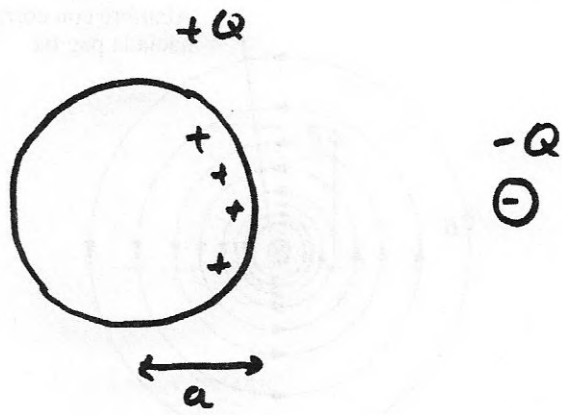
$$E_{\text{uno}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

**EJEMPLO**

Una esfera conductora con radio $a$ tiene carga $+Q$. Una carga puntual $-Q$ está a una distancia $3a$ del centro de la esfera. ¿Cuál es el campo eléctrico a la mitad de la distancia entre la carga puntual y la superficie de la esfera?

Hemos encontrado el campo eléctrico debido a una esfera así como el debido a una carga puntual. Podríamos encontrar cada campo por separado y sumarlos (vectorialmente, por supuesto). Eso no funcionaría aquí.

Para resolver la primera parte, trazamos una esfera imaginaria alrededor de la esfera de carga. Después usamos la simetría del problema para decir que el campo eléctrico era el mismo en todos los puntos de nuestra esfera imaginaria. Pero la carga $-Q$ ejerce




una fuerza en las cargas dentro de la esfera, atrayendo la carga positiva hacia sí. La carga en la esfera ya no es simétrica. Sin la simetría no podemos resolver la integral para encontrar el flujo. (Es posible resolver el problema, pero se requiere de matemáticas más avanzadas de las que hemos venido usando en este libro.)

Podríamos resolver el problema si la esfera estuviera hecha de material aislante y no de material conductor. Entonces las cargas en la esfera no se moverían y no serían afectadas por la carga puntual.

*LECCIÓN*

La superposición nos permite encontrar el campo de cada carga por separado y sumar los campos. Si en el problema hay un conductor, es posible que la superposición no funcione. Verifique si una de las cargas hace que otras cargas se muevan y destruyan la simetría.

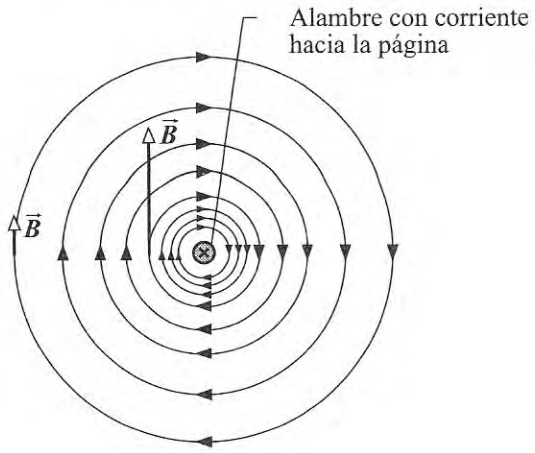
## 9.2 LEY DE AMPERE*

Del mismo modo en que es posible usar las líneas de campo para visualizar un campo eléctrico, es posible usarlas para visualizar un campo magnético. Las líneas de campo magnético nunca terminan, sino que forman lazos. La figura muestra las líneas de campo magnético producidas por una corriente que entra en la página. Las líneas de campo se separan cada vez más entre sí a medida que se alejan de la corriente, debido a que el campo se debilita.

Cuando calculamos el flujo de campo eléctrico, obtuvimos un total que se relacionaba con la carga dentro de la superficie. Esto se debe a que las líneas de campo eléctrico empiezan y terminan en cargas eléctricas. Las líneas de campo magnético no comienzan ni terminan, de modo que el flujo de campo magnético a través de cualquier superficie cerrada siempre es cero. Es útil saber esto, pero no nos ayuda a encontrar la intensidad del campo magnético.

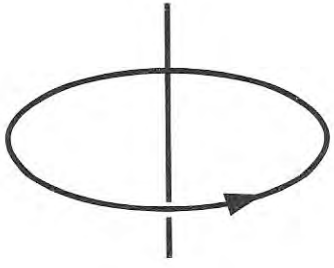
En vez de usar una superficie cerrada, la ley de Ampere utiliza un circuito cerrado.

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}s = \mu_0 I_{\text{contenida}}$$

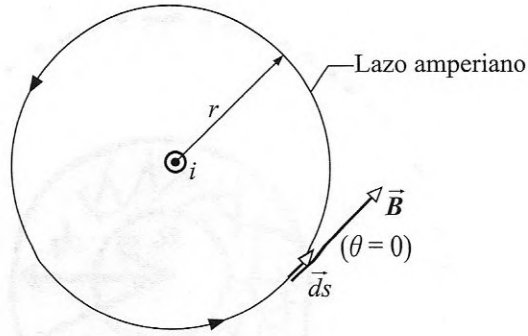



Elija cualquier lazo cerrado; esto es, comience en cualquier punto y avance en cualquier sentido, siempre que termine donde empezó (usar el símbolo $\oint$ en lugar de $\int$ es una manera de indicar que debe usarse una trayectoria cerrada). A medida que avance por esta ruta, encuentre el campo magnético en cada punto. Tome la componente del campo magnético $\boldsymbol{B}$ que es paralela al paso siguiente $d\boldsymbol{s}$ y multiplíquelos. Cuando sume el producto de todos los pasos, la ley de Ampere le dice que obtiene $\mu_0$ veces la corriente contenida por el lazo. No es la corriente que circula por la trayectoria, sino la que pasa a través de la superficie de la cual la trayectoria es el borde.

Como en el caso de la ley de Gauss, sólo resolvimos la integral cuando es razonablemente fácil. Veamos cómo funciona. Deseamos encontrar el campo magnético creado por un alambre recto largo con corriente $i$. Trazamos un "lazo amperiano" imaginario alrededor del alambre a una distancia $r$.



El problema tiene simetría —si hacemos girar el lazo alrededor del eje del alambre, se ve igual—, de modo que el campo magnético es el mismo en cualquier parte de la trayectoria imaginaria (si el alambre tuviera curvatura en lugar de ser recto, esto no se cumpliría). Además, con base en la regla de la mano derecha, este campo magnético será paralelo a la trayectoria.




$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint B\, ds = B \oint ds$$

La última integral, $\oint ds$, es la suma de las longitudes de cada paso para todos los pasos. Dado que ya hemos considerado la parte vectorial (el campo magnético es paralelo a la trayectoria), se trata de la longitud de los pasos y no del desplazamiento de los mismos. Ésta es la longitud de la trayectoria, de modo que $\oint ds = L$.

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint B\, ds = B \oint ds = BL = B(2\pi r)$$

La ley de Ampere nos dice que esta integral es igual a $\mu_0 I_{\text{contenida}}$, de modo que

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{contenida}} = \mu_0 i$$

$$B_{\text{alambre}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

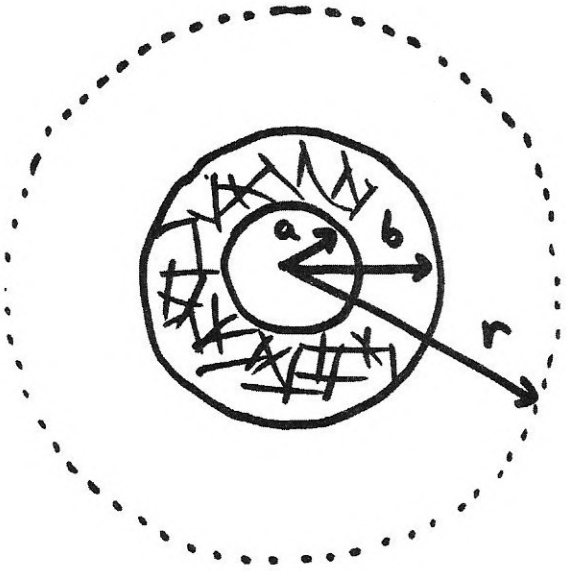
Es el mismo resultado que obtuvimos en el capítulo anterior, pero esta vez con cálculo simple en vez de cálculo difícil.

$$\overbrace{BL = \underbrace{\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\text{contenida}}}_{\text{ley de Ampere}}}^{\text{simetría}}$$

**EJEMPLO**

Un tubo hueco recto y largo lleva una corriente $i$. El tubo tiene radio interno $a$ y radio externo $b$. ¿Cuál es el campo magnético creado por la corriente?

Elegimos como nuestra trayectoria imaginaria un círculo de radio $r$ con centro en el eje del tubo. Igual que en el caso del alambre, el campo magnético es paralelo a la trayectoria y tiene la misma magnitud en cualquier parte de ella. (Si la corriente sale de la página, entonces el campo magnético tiene sentido contrario a las manecillas del reloj.)




$$BL = \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}s = \mu_0 I_{\text{contenida}}$$
$$B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{contenida}}$$

¿Cuánta corriente está contenida? Si $r < a$, nada de la corriente está contenida porque el centro del tubo es hueco.

$$B(2\pi r) = \mu_0(0)$$
$$B = 0$$

Si $r \geq b$, entonces toda la corriente está contenida porque la trayectoria imaginaria está fuera del tubo.

$$B(2\pi r) = \mu_0(i)$$

$$B = \frac{\mu_0(i)}{2\pi r}$$

Si $a \leq r < b$, parte de la corriente está contenida.

$$I_{\text{contenida}} = \frac{(\text{área del tubo contenida})}{(\text{área del tubo})}\, i$$

$$I_{\text{contenida}} = \frac{\pi r^2 - \pi a^2}{\pi b^2 - \pi a^2}\, i$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \left( \frac{\pi r^2 - \pi a^2}{\pi b^2 - \pi a^2}\, i \right)$$

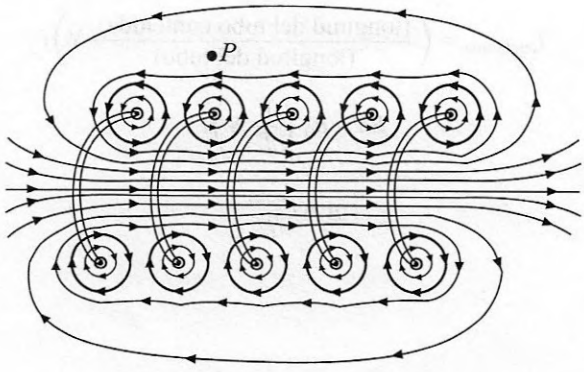
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left( \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$$

De este modo,

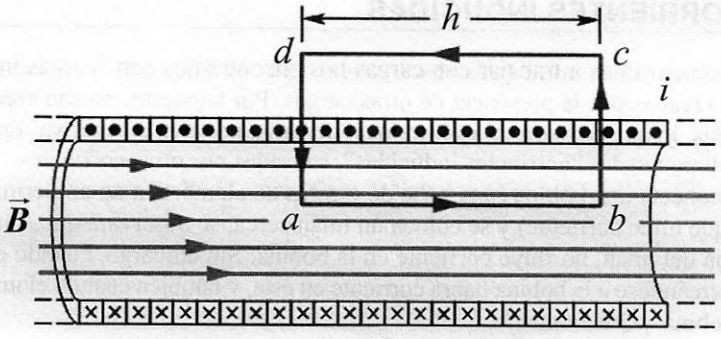
$$B(r) = \begin{cases} 0, & \text{para } r < a \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(\dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right), & \text{para } a \le r < b \\ \dfrac{\mu_0 (i)}{2\pi r}, & \text{para } r \ge b \end{cases}$$

**EJEMPLO**

Un solenoide es un tubo largo con un alambre arrollado en él ("largo" significa que la longitud del tubo es mucho mayor que su diámetro). ¿Cuál es el campo magnético en el centro del solenoide? El solenoide tiene longitud $L$ y el alambre, en el que circula una corriente $i$, lo rodea $N$ veces.




Deseamos conocer el campo en el centro; dicho campo corre a lo largo del solenoide, de modo que nuestra trayectoria debe correr por el centro de éste. Elegimos un rectángulo que recorre una distancia $h$ por el centro del solenoide, luego sale y regresa.



A lo largo del eje, el campo magnético es constante y paralelo a la trayectoria. En los lados ascendente y descendente de la trayectoria, el campo magnético es perpendicular a la misma, de modo que la componente paralela a la trayectoria es cero. Fuera del solenoide el campo magnético es muy pequeño (no igual a cero, pero mucho menor que dentro del solenoide).

$$BL = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\text{contenida}}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = (Bh) + (0) + (0 \times h) + (0)$$

$$Bh = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\text{contenida}}$$

¿Cuánta corriente está contenida? Muchas "vueltas" o espiras del alambre atraviesan el lazo, y cada una lleva una corriente $i$.

$$I_{\text{contenida}} = (\text{número de espiras contenidas})\, i$$

$$I_{\text{contenida}} = \left( \frac{(\text{longitud del tubo contenida})}{(\text{longitud del tubo})} N \right) i$$

$$Bh = \mu_0 \left( \frac{h}{L} N \right) i$$

$$B = \frac{\mu_0 N i}{L}$$

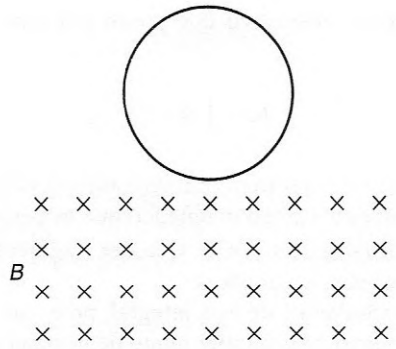
*LECCIÓN*

Como la ley de Gauss, la ley de Ampere siempre se cumple, pero a fin de poder usarla para encontrar el campo magnético necesitamos que el problema tenga simetría.

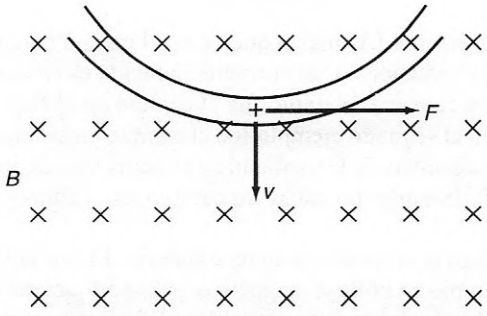
## 9.3 CORRIENTES INDUCIDAS

Cuando comenzamos a trabajar con cargas nos encontramos con "cargas inducidas". Éstas son creadas por la presencia de otras cargas. Por supuesto, no son creadas, sino desplazadas, lo que provoca un exceso local de carga positiva o negativa. En esta sección estudiaremos las "corrientes inducidas", causadas por otras corrientes.

Si se conecta una bobina (una serie de espiras de alambre) a un amperímetro (dispositivo que mide corriente) y se coloca un imán cerca, se observará que, sin importar la potencia del imán, no fluye corriente en la bobina. Sin embargo, cuando el imán se mueve acercándose a la bobina habrá corriente en ésta, y también cuando el imán se aleja de la bobina. ¿Qué ocurre?




Imagine una espira de alambre en el borde de un campo magnético. Si se hace descender la espira, las cargas positivas que están en su parte inferior experimentan una fuerza hacia la derecha e impulsan una corriente en la espira en sentido contrario a las manecillas del reloj.




Si la espira se introduce por completo en el campo magnético (no sólo parcialmente), entonces las cargas positivas en la parte superior de la espira también experimentan una fuerza hacia la derecha, y el resultado es una corriente neta de cero. Esto es similar a lo que ocurre en el caso del imán y la bobina sin movimiento relativo, donde no es el campo magnético por sí mismo el que causa una corriente, sino el movimiento en el campo magnético.

El voltaje inducido por un campo magnético en una espira es

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

donde $\Phi_B$ es el flujo de campo magnético que pasa por la espira. Este voltaje causa una corriente si la espira es cerrada (completa). ¿Qué es el voltaje? Lo explicaremos en los dos capítulos siguientes, pero por ahora diremos que es lo que hace que las cargas se muevan en una corriente.

¿Qué es el flujo? (Si usted no recuerda la respuesta por lo que expusimos en la ley de Gauss, la repetiremos aquí.) Imagine el lector que está bajo la lluvia sosteniendo un balde. El flujo sería el ritmo al que las gotas de lluvia entran en el balde. Usted podría reducir este ritmo usando un balde más pequeño, yendo a un lugar con menos lluvia o inclinando el balde. El flujo de campo magnético es en realidad un recuento del

número de líneas de campo magnético que pasan por una superficie. En términos matemáticos,

$$\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Esta ecuación indica dividir la superficie en fragmentos diminutos, encontrar para cada uno de ellos la componente del campo magnético que es perpendicular a la superficie (normal a la superficie), multiplicar por el área del fragmento diminuto y sumar los resultados de cada uno de estos fragmentos.

A pesar del aspecto intimidante de esta integral, no es tan mala. Por lo general, el campo magnético es el mismo en cualquier punto de la superficie (o pretendemos que lo sea), de manera que

$$\underbrace{\Phi_B = \overbrace{\int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}}^{\text{campo constante}} = BA}_{\text{definición de flujo}}$$

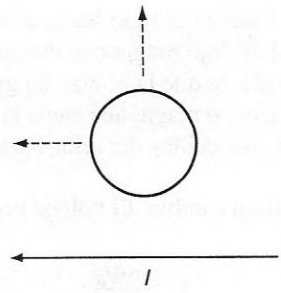
La derivada (d) o incremento ($\Delta$) indica que no es el campo magnético el que crea un voltaje o una corriente inducidos. Una corriente inducida es causada por un *cambio* en el flujo magnético. En el primer ejemplo fue el cambio en el flujo causado por el movimiento del imán. En el segundo ejemplo fue el cambio en el flujo cuando la espira se movía en el campo magnético. Si la totalidad de la espira está dentro del campo, entonces el movimiento de la espira no causa un cambio en el flujo y por lo tanto no hay corriente inducida.

El signo negativo en la ecuación es un recordatorio. El sentido de la corriente inducida es opuesto al cambio en el flujo magnético. ¿Cómo funciona esto? Consideremos nuestra espira en el borde del campo magnético. Inicialmente, el flujo a través de la espira es cero, dado que no hay campo magnético en el sitio donde se encuentra la espira. A medida que hacemos descender la espira, hacia el interior del campo magnético, el flujo magnético hacia dentro de la página aumenta. La espira "quiere" conservar el mismo flujo que tenía (cero en este caso), así que crea un campo magnético hacia fuera de la página. Es decir, habrá una corriente inducida en el sentido que hace que un campo magnético pase a través de la espira hacia fuera de la página.

¿Qué sentido tendría esta corriente? Hay dos modos de deducirlo empleando las reglas de la mano derecha que vimos en la sección sobre campo magnético. Uno consiste en apuntar con el pulgar en el sentido en que se desea que se dirija el campo magnético a través de la espira (hacia fuera de la página), y entonces los dedos se doblarán en el sentido de la corriente (en sentido contrario a las manecillas del reloj). La otra manera es apuntar los dedos en el sentido en que se desea que se dirija el campo magnético a través de la espira. Entonces el pulgar apuntará en el sentido de la corriente (contrario a las manecillas del reloj).

**EJEMPLO**

Una espira de alambre está en el mismo plano que un alambre recto largo. El alambre lleva una corriente constante hacia la izquierda. ¿Cuál es el sentido de la corriente inducida en la espira cuando ésta se mueve hacia arriba? ¿Y cuando se mueve hacia la izquierda?



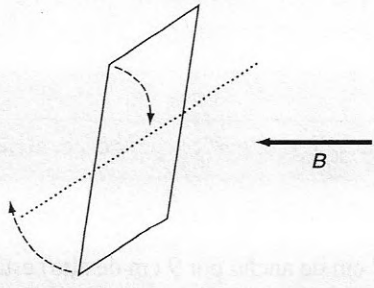

¿Cuál es el sentido del campo magnético que causa la corriente (que se mueve en línea recta) en la espira? Sostenga la mano derecha con el pulgar en el sentido de la corriente (hacia la izquierda). Los dedos se alejan de usted (hacia dentro del papel) encima del alambre, y apuntan hacia usted (hacia fuera del papel) abajo del alambre. La espira está arriba del alambre, de modo que ahí el campo magnético va hacia dentro de la página.

¿Qué ocurre con el flujo magnético cuando la espira se mueve hacia arriba? Cuando usted se aleja del alambre recto, el campo magnético se debilita ($B = \mu_0 I/2\pi R$). Cuando la espira se mueve hacia donde el campo magnético es más débil, el flujo disminuye. El flujo magnético hacia dentro de la página disminuye, de modo que la espira trata de crear un campo magnético hacia dentro del papel, a fin de reponer el flujo que había antes. Para crear campo magnético hacia dentro de la página, la corriente debe avanzar en el sentido de las manecillas del reloj (use una de las reglas de la mano derecha).

¿Qué ocurre con el flujo magnético cuando la espira se mueve hacia la izquierda? Se desplaza de un punto a otro donde el campo magnético es el mismo, de modo que el flujo no cambia. Si el flujo no cambia, entonces no hay corriente inducida.

**EJEMPLO**

Una bobina rectangular consta de 25 espiras de alambre, cada una de 7 cm por 9 cm. Está orientada verticalmente en un plano perpendicular a la página. El campo magnético de 0.15 T apunta hacia la izquierda. Cuando la bobina gira 90° sobre su eje horizontal en 0.025 segundos, ¿cuáles son el sentido de la corriente inducida y la magnitud promedio del voltaje inducido?




Antes de que la bobina gire el flujo magnético es hacia la izquierda. Después de que la bobina gira 90°, el flujo es cero: el campo magnético rodea la bobina pero no la atra-

viesa, sólo roza la superficie. Cuando el flujo hacia afuera de la página disminuye, la bobina trata de mantener igual el flujo magnético creando un campo magnético hacia la izquierda (hacia arriba después de que la bobina ha girado) a fin de reponer el flujo que había antes. Para crear un campo magnético hacia la izquierda, la corriente inducida debe tener el sentido de las manecillas del reloj viendo desde la derecha (como se ve la bobina antes de girar).

Cuando la bobina gira, el flujo cambia. El voltaje promedio inducido es

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}$$

¿Qué ocurrió con el signo negativo? El signo es sólo para recordarnos que la corriente inducida *se opone* al cambio del flujo. Ya hemos deducido el sentido de la corriente inducida y ahora tratamos de encontrar la magnitud. La magnitud no puede ser negativa.

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} \right| = \left| \frac{(B_f A - B_i A)}{\Delta t} \right|$$

Después de que la bobina ha girado 90° el flujo es cero: nada del campo magnético atraviesa la bobina.

$$\mathcal{E} = \frac{B_i A}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E} = \frac{(0.15 \text{ T})\,[(7 \text{ cm})(9 \text{ cm})]}{(0.025 \text{ s})}$$

$$\mathcal{E} = 0.038 \text{ T m}^2/\text{s} = 0.038 \text{ V} = 38 \text{ mV}$$

Éste es el voltaje inducido en cada espira. Hay 25 espiras conectadas entre sí, de modo que el voltaje es

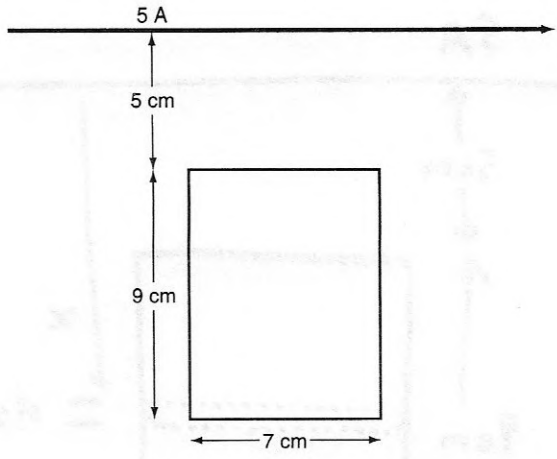
$$25 \times 0.038 \text{ V} = 0.95 \text{ V}$$

*LECCIÓN*

La corriente inducida crea un campo magnético que se opone al *cambio* en el flujo magnético.

**EJEMPLO***

Una espira rectangular (7 cm de ancho por 9 cm de alto) está en el plano de la página. El borde superior está a 5 cm de un alambre recto largo que se encuentra en el mismo plano. La corriente en el alambre recto es de 5 A y aumenta a razón de 180 A/s. ¿Cuál es el voltaje inducido en la espira?




El voltaje inducido es

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B$$

El flujo magnético es

$$\Phi_B = \int B\,\mathrm{d}A$$

El campo magnético no es el mismo en todas las partes de la espira, de modo que no podemos usar $\Phi_B = BA$. Por lo tanto, dividimos la superficie formada por la espira en muchos fragmentos diminutos; cada uno tan pequeño que el campo magnético sea el mismo en la totalidad de cada fragmento. Utilizamos fragmentos de 7 cm de ancho por d$x$ de alto. Así,

$$\Phi_B = \int B\,\mathrm{d}A$$

$$\Phi_B = \int_{5\text{ cm}}^{14\text{ cm}} \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\,[(7\text{ cm})\,\mathrm{d}x]$$

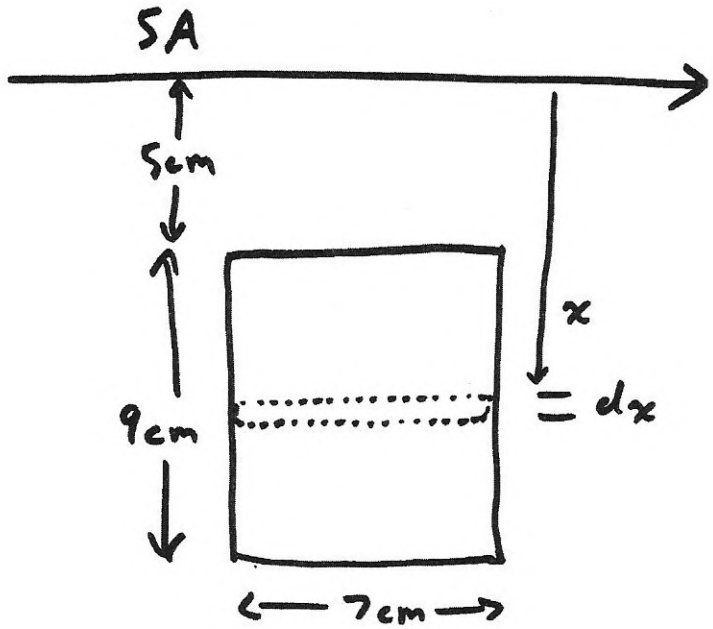
$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i(7\text{ cm})}{2\pi}\int_{5\text{ cm}}^{14\text{ cm}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i(7\text{ cm})}{2\pi}\,[\ln x]_{5\text{ cm}}^{14\text{ cm}}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i(7\text{ cm})}{2\pi}\,[\ln(14\text{ cm}) - \ln(5\text{ cm})]$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i(7\text{ cm})}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{14\text{ cm}}{5\text{ cm}}\right)\right]$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i(7\text{ cm})}{2\pi}\ln(2.8)$$




El voltaje inducido es

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mu_0 i(7\text{ cm})}{2\pi}\ln(2.8)$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mu_0(7\text{ cm})}{2\pi}\ln(2.8)$$

$$\mathcal{E} = (180\text{ A/s})\frac{(4\pi \times 10^{-7}\text{ T m/A})(0.07\text{ m})}{2\pi}\ln(2.8)$$

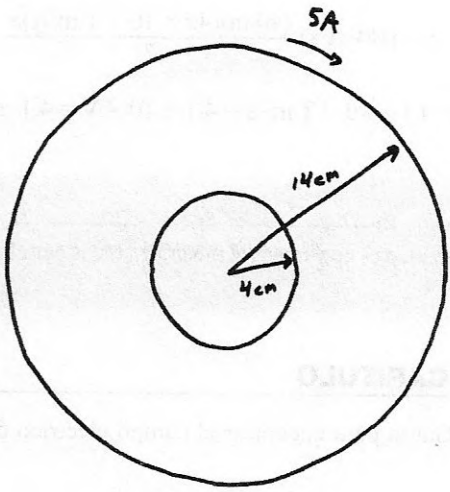
$$\mathcal{E} = 2.6 \times 10^{-6}\text{ T m}^2/\text{s} = 2.6 \times 10^{-6}\text{ V} = 2.6\ \mu\text{V}$$

**EJEMPLO**

Una bobina circular pequeña (8 cm de diámetro) con 10 espiras se encuentra en el mismo plano y dentro de una bobina más grande (28 cm de diámetro) con 100 espiras. La corriente en la bobina externa es de 5 A y aumenta a razón de 180 A/s. ¿Cuál es el voltaje inducido en la bobina interna?

El voltaje inducido es

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B$$




El flujo magnético es

$$\Phi_B = \int B \, dA$$

El campo magnético no es del todo uniforme en todas las partes de la bobina, pero se encuentra razonablemente cerca de serlo, así que usaremos $\Phi_B = BA$.

$$\Phi_B = BA$$

El campo magnético es $B_{\text{espira}} = \mu_0 i/2R$ para cada una de las 100 espiras de la bobina grande.

$$\Phi_B = \left(100 \frac{\mu_0 i}{2R}\right) A$$

Sólo el campo que pasa por la bobina menor crea flujo en ésta.

$$\Phi_B = \left(100 \frac{\mu_0 i}{2(14 \text{ cm})}\right) [\pi (4 \text{ cm})^2]$$

$$\Phi_B = \frac{(4 \text{ m}) \mu_0 i \, \pi}{7}$$

El voltaje inducido (con 10 espiras en la bobina menor) es

$$\mathcal{E} = N_{\text{menor}} \frac{d}{dt} \Phi_B$$

$$\mathcal{E} = (10) \frac{d}{dt} \frac{(4 \text{ m}) \mu_0 i \, \pi}{7}$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{di}{dt}\right) \frac{(40 \text{ m}) \mu_0 \, \pi}{7}$$

$$\mathcal{E} = (180 \text{ A/s}) \frac{(40 \text{ m})(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m/A})\pi}{7}$$

$$\mathcal{E} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ T m}^2\text{/s} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ V} = 4.1 \text{ mV}$$

*LECCIÓN*

Cuando el campo magnético es constante (el mismo en todas partes), el flujo magnético es $\Phi_B = BA$.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- Utilice la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico de una distribución de carga simétrica.

$$\overbrace{EA = \underbrace{\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}}_{\text{definición de flujo}}}^{\text{simetría}} = \overbrace{\Phi_E = \frac{q_{\text{neta}}}{\epsilon_0}}^{\text{ley de Gauss}}$$

- Utilice la ley de Ampere para encontrar el campo magnético de una corriente simétrica.

$$\overbrace{BL = \underbrace{\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\text{contenida}}}_{\text{ley de Ampere}}}^{\text{simetría}}$$

- Un flujo magnético cambiante crea una corriente inducida

$$\mathcal{E} = \frac{d}{dt} \Phi_B$$

donde el flujo magnético es

$$\underbrace{\Phi_B = \overbrace{\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}}^{\text{campo constante}} = BA}_{\text{definición de flujo}}$$

CAPÍTULO **10**

# *POTENCIAL = VOLTAJE*

Hemos aprendido a usar fuerzas cuando analizamos objetos con carga. ¿Podemos utilizar la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento?

Ciertamente, la energía y la cantidad de movimiento se conservan ambos, pero, ¿podemos usarlas de manera eficaz para resolver problemas? La conservación de la cantidad de movimiento no nos ayudaría, porque algunas de las cargas suelen estar fijas o "pegadas", y no conocemos la fuerza que actúa sobre ellas así que no conocemos el impulso. La conservación de la energía es tan eficaz para analizar las cargas que la usamos todo el tiempo, a menudo sin advertirlo.

¿Cómo usamos la conservación de la energía antes? La energía de partida más la energía que aplicamos (trabajo) es igual a la energía que nos queda al final.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

El trabajo realizado por algunas fuerzas (gravedad, resortes) es más fácil de analizar empleando la energía potencial, de modo que no las incluimos en el término para el trabajo. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica es el otro tipo de trabajo que resulta más fácil de analizar mediante la energía potencial.

¿Cómo funciona la energía potencial de la gravedad? Si comenzamos con una roca al pie de una colina y la llevamos a la cima, el trabajo que la gravedad realiza durante el proceso es el mismo sin importar cómo llevemos la roca a la cima. El trabajo que la gravedad realiza es negativo, en virtud de que la fuerza de la gravedad actúa hacia abajo pero el movimiento es hacia arriba. Podríamos hacer que la gravedad realizara trabajo positivo dejando rodar la roca colina abajo; éste es el motivo por el que la llamamos energía potencial. Si antes atamos un extremo de una cuerda a la roca y el otro extremo a un generador (capítulo siguiente), entonces el descenso de la roca colina abajo podría producir electricidad para alimentar el aparato de sonido del lector y tocar música, lo cual es el propósito de la física.

El trabajo que realizamos y que se almacena como energía potencial es $mgh$. Si hubiéramos desplazado una roca con el doble de masa entonces la energía potencial habría sido del doble. La energía potencial es el producto del tamaño de la roca ($m$) y algo que depende de la posición ($gh$). Esta última parte, la que depende de la posición, es el **potencial**. Las unidades de $gh$ son $m^2/s^2$ o J/kg y reflejan la cantidad de trabajo que se requiere para mover un kilogramo de roca.

En el caso de la electricidad, la energía potencial es igual al producto del tamaño (la carga $q$) de lo que movemos por el potencial $V$, que depende de la posición.

$$U = EP = q\,V$$

(A menudo se usa el símbolo $U$ para representar la energía potencial.) El potencial se mide en joules por coulomb o volts, y a veces se denomina voltaje.

$$1\ \text{V} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{C}}$$

Recuerde que potencial y voltaje son lo mismo, pero potencial y energía potencial no son lo mismo. Una ubicación tiene potencial, y una carga en esa ubicación tiene energía potencial.

## 10.1 DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL

La energía potencial es trabajo que hemos realizado y que podríamos recuperar. Cuando levantamos una piedra, ejercemos una fuerza igual a la gravedad $mg$ (un poco más al principio para iniciar el movimiento) para llevarla a una altura $h$. Dado que empujamos en el mismo sentido que el movimiento, realizamos trabajo positivo. La gravedad empuja en el sentido opuesto al del movimiento y realiza trabajo negativo a medida que aumenta la energía potencial.

Cuando empujamos una carga en contra de la fuerza eléctrica, realizamos trabajo positivo, incrementando la energía potencial. Cuando la carga se mueve por sí misma y la frenamos, realizamos trabajo negativo, al tiempo que la energía potencial disminuye (parte de la energía potencial se convierte en trabajo). Para calcular la energía eléctrica potencial debemos determinar el trabajo que realizamos empujando en contra de la fuerza eléctrica, o asignar un signo negativo al trabajo realizado por la fuerza eléctrica.

$$\Delta EP = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} = -qE \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{d} = -qEd\cos\theta$$

Con frecuencia el campo eléctrico no es constante cuando movemos la carga. Por tanto dividimos la trayectoria en fragmentos diminutos, tan diminutos que el campo eléctrico es constante en la totalidad de la trayectoria diminuta. Entonces sumamos el trabajo que hemos realizado (aumento en la energía potencial) para todos los diminutos fragmentos de la trayectoria.

$$\Delta EP = q\int -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

donde $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ es la componente del campo eléctrico paralela al fragmento diminuto $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ multiplicada por la longitud del fragmento.

La energía potencial es el producto de dos partes, la cantidad de carga que movemos y algo que depende sólo de la trayectoria en que se mueve. Esta segunda parte es el potencial.

$$\Delta V = \int -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

**EJEMPLO***

¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos $C$ y $D$? ¿Cuál es la diferencia de potencial entre $C$ y $E$?

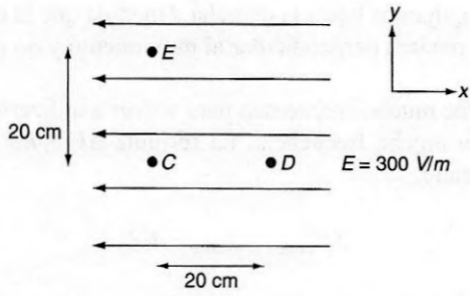
Tenemos

$$\Delta V = \int -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

o

$$V_D = V_C + \int_C^D -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$V_D = V_C + \int_C^D -(-300\ \mathrm{N/C}\hat{\boldsymbol{i}}) \cdot (\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{i}})$$




El campo eléctrico apunta en el sentido negativo de $x$, mientras que $d\boldsymbol{x}$ señala en el sentido positivo de $x$.

$$V_D = V_C + \int_C^D (300 \text{ N/C})(\hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}})dx$$

El producto punto $\hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}$ significa "encontrar la componente de $x$ que es paralela a $x$", por lo que es igual a uno.

$$V_D = V_C + (300 \text{ N/C}) \int_C^D dx$$

La integral es la suma de las longitudes de los diminutos fragmentos de la trayectoria, por lo que es igual a la distancia de $C$ a $D$.

$$V_D = V_C + (300 \text{ N/C})(0.20 \text{ m})$$
$$V_D - V_C = 60 \text{ N m/C} = 60 \text{ J/C} = 60 \text{ V}$$

Esto indica que $D$ tiene 60 V más de potencial que $C$.

Podemos repetir el proceso para $E$.

$$V_E = V_C + \int_C^E -\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}$$

$$V_E = V_C + \int_C^E -(-300 \text{ N/C}\,\hat{\boldsymbol{i}}) \cdot (dx\,\hat{\boldsymbol{j}})$$

El campo eléctrico apunta en el sentido negativo de $x$, mientras que $d\boldsymbol{x}$ lo hace en el sentido positivo de $y$.

$$V_E = V_C + \int_C^E (300 \text{ N/C})(\hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}})dx$$

El producto punto $\hat{\boldsymbol{i}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}$ significa "encontrar la componente de $x$ que es paralela a $y$", por lo que es igual a cero.

$$V_E = V_C + (300 \text{ N/C})(0) \int_C^E dx$$
$$V_E = V_C$$
$$V_E - V_C = 0$$

¿Por qué es cero la diferencia de potencial entre $C$ y $E$? Si moviéramos una carga positiva de $C$ a $E$, la fuerza eléctrica apuntaría hacia la izquierda y tendríamos que empu-

jar a la derecha. Si empujamos hacia la derecha a medida que la carga se mueve hacia arriba, lo hacemos de manera perpendicular al movimiento y no realizamos trabajo.

Éste es un resultado que muchos recuerdan para volver a utilizarlo. También se usa de manera incorrecta con mucha frecuencia. La fórmula $\Delta V = Ed$ sólo funciona en un campo eléctrico constante.

$$\Delta V_{\text{campo constante}} = Ed$$

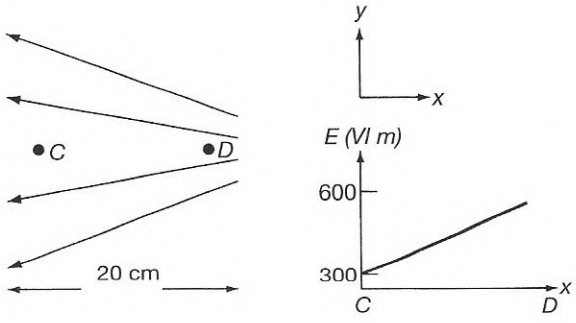
Existe una conexión entre el sentido del campo eléctrico y el potencial. En el ejemplo, el potencial (o voltaje) en $D$ fue mayor que en $C$. El campo eléctrico siempre avanza "cuesta abajo", de mayor potencial a menor potencial.

*LECCIÓN*

El campo eléctrico va de mayor potencial a menor potencial.

**EJEMPLO***

¿Cuál es la diferencia de potencial entre $C$ y $D$?




Una vez más,

$$\Delta V = \int -\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}$$

$$V_D = V_C + \int_C^D -\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}$$

El campo eléctrico no es constante. Su magnitud es máxima cuando la densidad de líneas de campo es máxima o cuando las líneas de campo están más cercanas entre sí. En este caso el campo eléctrico es

$$\boldsymbol{E} = \left[300 \text{ V/m} + (300 \text{ V/m})\left(\frac{x}{0.2 \text{ cm}}\right)\right](-\hat{\boldsymbol{i}})$$

* Este ejemplo utiliza el cálculo.

Antes usamos como unidades de campo eléctrico N/C. También son iguales a V/m.

$$\boldsymbol{E} = [300\ \text{V/m} + (1500\ \text{V/m}^2)\,x](-\hat{\boldsymbol{\imath}})$$

$$V_D = V_C + \int_C^D -[300\ \text{V/m} + (1500\ \text{V/m}^2)\,x]\,(-\hat{\boldsymbol{\imath}}) \cdot (\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{\imath}})$$

$$V_D = V_C - (-\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}) \int_C^D [300\ \text{V/m} + (1500\ \text{V/m}^2)\,x]\,\mathrm{d}x$$

$$V_D = V_C + \int_C^D [300\ \text{V/m} + (1500\ \text{V/m}^2)\,x]\,\mathrm{d}x$$

$$V_D = V_C + \int_C^D (300\ \text{V/m})\,\mathrm{d}x + \int_C^D (1500\ \text{V/m}^2)\,x\,\mathrm{d}x$$

$$V_D = V_C + [(300\ \text{V/m})x]_0^{0.2\ \text{m}} + \left[(1500\ \text{V/m}^2)\frac{1}{2}x^2\right]_0^{0.2\ \text{m}}$$

$$V_D = V_C + (300\ \text{V/m})[(0.2\ \text{m}) - (0)] + \frac{1}{2}(1500\ \text{V/m}^2)[(0.2\ \text{m})^2 - (0)^2]$$

$$V_D = V_C + (60\ \text{V}) + (30\ \text{V})$$

$$V_D - V_C = 90\ \text{V}$$

Esto indica que $D$ tiene 90 V más de potencial que $C$.

*LECCIÓN*

Sólo utilice $\Delta V = Ed$ en un campo eléctrico constante.

Cuando analizamos la energía potencial gravitacional podíamos elegir como la altura cero cualquier punto que deseáramos, siempre que fuéramos consistentes. Pudimos hacerlo porque las energías potenciales inicial y final aparecían en lados opuestos de la ecuación, por lo que sólo importaba la diferencia de energía potencial. Lo mismo es válido para la electricidad, de modo que sólo importa la diferencia de potencial. Cuando decimos "el potencial en un punto" nos referimos a la diferencia de potencial entre ese punto y el que hayamos elegido como el potencial cero.

**EJEMPLO***

¿Cuál es el potencial a una distancia $R$ de una carga puntual $q$?

$$\Delta V = \int -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Sólo la diferencia de potencial crea un efecto físico. Cuando hablamos del potencial en un punto nos referimos a la diferencia de potencial respecto de algún otro punto. Si ese

punto no está dado, entonces se supone que está "en el infinito", o a una distancia infinita de cualquier otra carga en el problema.

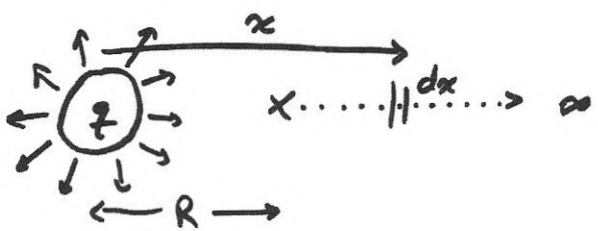
$$V_R = V_\infty + \int_\infty^R -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Algunas personas detestan resolver integrales con sentido negativo; parece que siempre se las arreglan para equivocarse en un signo negativo.

$$V_\infty = V_R + \int_R^\infty -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$V_\infty$ es el potencial en $\infty$, que es cero.

$$0 = V_R + \int_R^\infty -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$




El campo eléctrico es $kq/r^2$ dirigido en sentido opuesto a la carga, siempre paralelo a nuestra trayectoria.

$$0 = V_R + \int_R^\infty -\left(\frac{kq}{r^2}\right) \mathrm{d}r$$

$$0 = V_R - kq \int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$0 = V_R - kq \left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty$$

$$0 = V_R - kq \left[\left(-\frac{1}{\infty}\right) - \left(-\frac{1}{R}\right)\right]$$

$$0 = V_R - kq \left(\frac{1}{R}\right)$$

$$V_R = \frac{kq}{R}$$

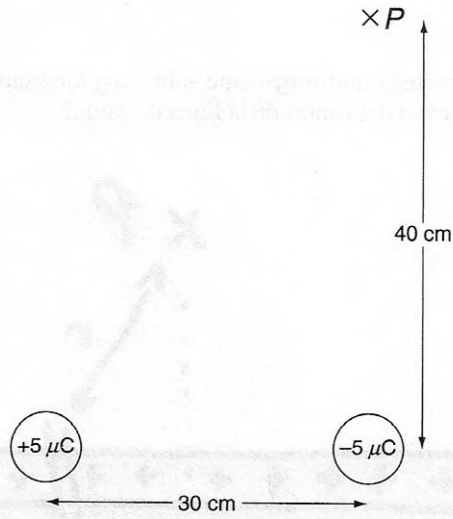
El resultado, el potencial creado por una carga puntual, vale la pena recordarlo. Es parte de lo que hace conveniente usar el potencial.

$$V_{\text{carga puntual}} = \frac{kq}{R}$$

Una de las ventajas de usar la conservación de la energía era que la energía no tiene dirección ni sentido. Nunca teníamos que encontrar y sumar componentes. Lo mismo es válido para la energía eléctrica, de modo que el potencial no tiene dirección ni sentido. Para encontrar el campo eléctrico creado por dos cargas, tendríamos que sumar vectorialmente los campos eléctricos. Para encontrar el potencial creado por dos cargas, sumamos los potenciales creados por cada carga, pero no vectorialmente.

**EJEMPLO**

¿Cuál es el potencial creado en el punto $P$ por las cargas de $+5\ \mu C$ y $-5\ \mu C$?




Para usar la ecuación

$$\Delta V = \int -\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}$$

necesitamos elegir una trayectoria (cualquiera) que vaya de algún lugar en que conozcamos el potencial (en $\infty$) al punto $P$. Después debemos encontrar el vector de campo eléctrico en cualquier punto de esta trayectoria. Es algo realizable pero requiere del engorroso cálculo. Parte de la razón de utilizar el potencial es evitar el cálculo (en serio).

En vez de resolver la integral, encontremos el potencial para cada carga puntual y sumemos los potenciales.

$$V_P = V_{+5} + V_{-5}$$

$$V_P = \frac{k(+5\ \mu C)}{R_+} + \frac{k(-5\ \mu C)}{R_-}$$

$$V_P = \frac{k(+5\ \mu C)}{\sqrt{(30\ cm)^2 + (40\ cm)^2}} + \frac{k(-5\ \mu C)}{(40\ cm)}$$

$$V_P = \frac{k(+5\ \mu C)}{(50\ cm)} + \frac{k(-5\ \mu C)}{(40\ cm)}$$

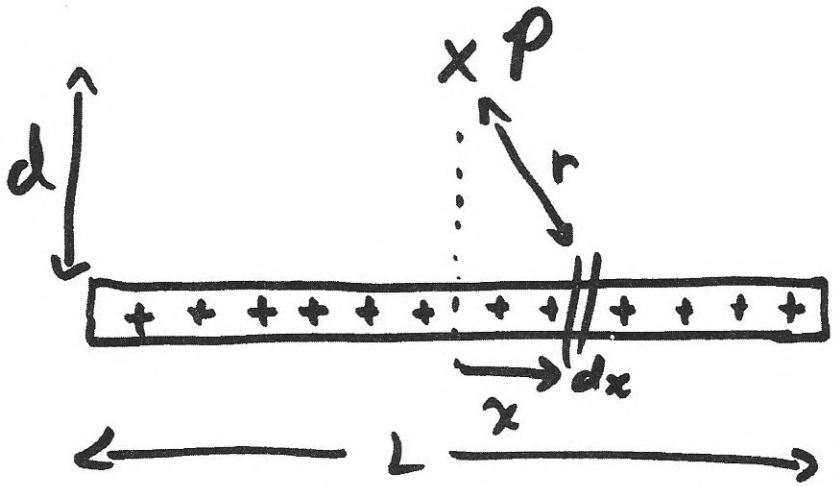
$$V_P = \frac{(9 \times 10^9\ N\ m^2/C^2)(+5 \times 10^{-6}\ C)}{(0.50\ m)} + \frac{(9 \times 10^9\ N\ m^2/C^2)(-5 \times 10^{-6}\ C)}{(0.40\ m)}$$

$$V_P = (9 \times 10^4\ N\ m/C) + (-11.25 \times 10^4\ N\ m/C)$$

$$V_P = -22\ 500\ V = -22.5\ kV$$

**EJEMPLO***

Una carga $Q$ está distribuida uniformemente sobre una longitud $L$. ¿Cuál es el potencial en $P$, a una distancia $d$ del centro de la línea de carga?




Hay dos maneras de abordar este problema. Podríamos comenzar en el infinito, donde sabemos que el potencial es cero, y desplazarnos a $P$, sumando el campo eléctrico. También podríamos dividir la carga en fragmentos diminutos, cada uno tan pequeño que toda la carga en él está a la misma distancia de $P$, y sumar los potenciales creados por todos los fragmentos. Para comparar ambos métodos aplicaremos los dos.

Primero dividimos la línea en pequeños fragmentos de carga. El potencial que cada fragmento de la línea crea en $P$ es

$$V = \frac{k\ (\text{carga del fragmento})}{(\text{distancia a } P)}$$

Necesitamos conocer la distancia de cada fragmento al punto $P$ y la carga de cada fragmento.

Utilizaremos $x$ para la distancia entre el punto medio de la línea y un fragmento de ella. Así, $x$ variará entre un mínimo de $-L/2$ y un máximo de $+L/2$. La anchura de cada

segmento es entonces $dx$, la distancia de un fragmento de la línea al siguiente. La distancia de cada fragmento a $P$ es

$$r = \sqrt{d^2 + x^2}$$

Necesitamos conocer la carga en cada fragmento. Si el tamaño del fragmento $dx$ es 1/100 de $L$, entonces la carga es 1/100 de $Q$. El tamaño de cada fragmento es $dx/L$ de la longitud, de modo que la carga es $dx/L$ de la carga, o $Q(dx/L)$. De manera alternativa, la densidad de carga a lo largo de la línea es $\lambda = Q/L$, y la carga en un fragmento con longitud $dx$ es $(Q/L)dx$.

El potencial en $P$ es

$$V_P = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{k(Q\,dx/L)}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$V_P = \frac{kQ}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$V_P = \frac{kQ}{L} \left[ \ln\left( x + \sqrt{d^2 + x^2} \right) \right]_{-L/2}^{+L/2}$$

$$V_P = \frac{kQ}{L} \left( \ln\left[ (L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2} \right] - \ln\left[ (-L/2) + \sqrt{d^2 + (-L/2)^2} \right] \right)$$

$$V_P = \frac{kQ}{L} \left[ \ln\left( \frac{(L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}}{(-L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}} \right) \right]$$

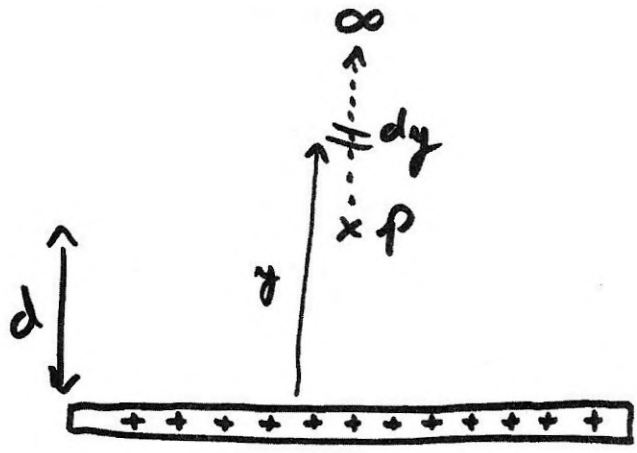
$$V_P = \frac{kQ}{L} \ln\left( \frac{(L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}}{(-L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}} \cdot \frac{(L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}}{(L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}} \right)$$

$$V_P = \frac{kQ}{L} \ln\left( \frac{\left( (L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2} \right)^2}{-(L/2)^2 + \left( \sqrt{d^2 + (L/2)^2} \right)^2} \right)$$

$$V_P = \frac{kQ}{L} \ln\left( \frac{\left( (L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2} \right)^2}{d^2} \right)$$

$$V_P = \frac{2kQ}{L} \ln\left( \frac{(L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}}{d} \right)$$

El otro método consiste en integrar el campo eléctrico desde infinito.




$$V_P = V_\infty + \int_\infty^P -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Pero aquí comenzaremos en $P$ e iremos al infinito.

$$V_\infty = V_P + \int_P^\infty -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Seguiremos una trayectoria recta ascendente a lo largo del eje $y$. El campo eléctrico apunta en este sentido, de modo que es paralelo a cada incremento diminuto. Cuando llegamos al infinito el potencial es cero.

$$0 = V_P + \int_P^\infty -E_y \, \mathrm{d}y$$

Necesitamos encontrar el campo eléctrico en cada punto a lo largo del eje $y$. Por fortuna lo hicimos en un ejemplo hace un par de capítulos.

$$E_y(y) = \frac{kQ}{y\sqrt{y^2 + (L/2)^2}}$$

$$0 = V_P + \int_d^\infty -\frac{kQ}{y\sqrt{y^2 + (L/2)^2}} \, \mathrm{d}y$$

$$V_P = kQ \int_d^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y^2 + (L/2)^2}}$$

$$V_P = kQ\left[-\frac{1}{(L/2)} \ln\left(\frac{(L/2) + \sqrt{y^2 + (L/2)^2}}{y}\right)\right]_d^\infty$$

$$V_P = \frac{2kQ}{L}\left[-\ln\left(\frac{(L/2) + \sqrt{\infty^2 + (L/2)^2}}{\infty}\right) + \ln\left(\frac{(L/2) + \sqrt{d^2 + (L/2)^2}}{d}\right)\right]$$

$$V_P = \frac{2kQ}{L}\left[-\ln\left(\frac{(L/2)+\infty}{\infty}\right)+\ln\left(\frac{(L/2)+\sqrt{d^2+(L/2)^2}}{d}\right)\right]$$

$$V_P = \frac{2kQ}{L}\ln\left(\frac{(L/2)+\sqrt{d^2+(L/2)^2}}{d}\right)$$

Es cierto que en este caso el segundo método parece ser más corto. Esto se debe en parte a que realizamos más álgebra después de la integración en el primer método, pero sobre todo a que la primera parte del segundo método ya había sido resuelta. Si usted puede elegir, primero intente emplear la superposición: sumar los potenciales creados por cada fragmento de la carga.

*LECCIÓN*

Para cargas múltiples, encuentre el potencial para cada carga y súmelas (superposición), o siga una trayectoria desde el infinito e integre el campo eléctrico.

## 10.2 USO DEL POTENCIAL

Cuando usamos la conservación de la energía, la fórmula era

$$E_{\text{antes}} + W = E_{\text{después}}$$

Luego introdujimos la energía potencial. Algunas fuerzas realizan el mismo trabajo sobre un objeto al moverse de $A$ a $B$ sin importar la trayectoria que siga el objeto. El trabajo que estas fuerzas realizan puede representarse por medio de la energía potencial,

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

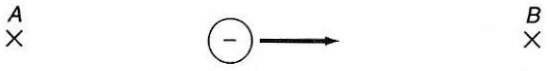
Si consideramos una fuerza mediante su energía potencial, entonces no incluimos el trabajo realizado por esa fuerza; ya está incluido en la energía potencial. La gravedad y los resortes pueden estudiarse de esta manera. Una tercera fuerza de este tipo es la fuerza eléctrica (pero no la fuerza magnética, que nunca realiza trabajo porque la fuerza es perpendicular al movimiento). La energía potencial de la electricidad es

$$U = EP = qV$$

**EJEMPLO**

Un electrón parte del punto $A$ ($V_A = 20$ V) con una rapidez de $2.5 \times 10^6$ m/s. ¿Con qué rapidez se mueve cuando llega al punto $B$ ($V_B = 30$ V)?

Podríamos pensar en usar fuerzas, encontrar el campo eléctrico, luego la fuerza eléctrica, y después el trabajo realizado cuando el electrón se mueve en cada segmento de la trayectoria. La finalidad del potencial es evitarnos esta tarea. Además, no sabe-




mos nada acerca de las cargas que crean el campo eléctrico. En su lugar usamos la conservación de la energía.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV_A + (0) = \frac{1}{2}m(v')^2 + qV_B$$

$$\frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}mv^2 + qV_A - qV_B$$

$$\frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}mv^2 + q(V_A - V_B)$$

$$\frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}mv^2 + (-e)\,(V_A - V_B)$$

$$(v')^2 = v^2 - \frac{2e}{m}\,(V_A - V_B)$$

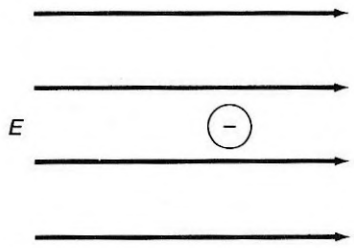
$$v' = \sqrt{(2.5 \times 10^6 \text{ m/s})^2 - \frac{2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})}\,[(20 \text{ V}) - (30 \text{ V})]}$$

$$v' = 3.1 \times 10^6 \text{ m/s}$$

¿Cómo cambia la rapidez del electrón cuando avanza a un potencial *más alto*? Dado que la carga del electrón es negativa, tiene energía potencial más negativa o más baja a 30 V que a 20 V.

**EJEMPLO**

Un campo eléctrico va de izquierda a derecha. Se coloca un electrón en el campo eléctrico y se le deja libre. ¿Hacia dónde se desplaza?



Existen infinidad de maneras de considerarlo. Primero, el campo eléctrico proviene de cargas positivas y va hacia las negativas. Debe haber cargas positivas a la izquierda y negativas a la derecha (no se ven; no preste atención a esas cargas tras bambalinas). El electrón es atraído hacia las cargas positivas y es repelido por las negativas, de modo que se mueve hacia la izquierda. Asimismo, la fuerza sobre una carga negativa tiene sentido opuesto al campo eléctrico, y el campo apunta hacia la derecha, de modo que la fuerza que actúa sobre el electrón se dirige hacia la izquierda.

Otra manera de abordar el problema consiste en usar la conservación de la energía.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

El electrón se dirigirá en cualquier sentido que aumente su rapidez. Comienza sin energía cinética. La única fuerza es la electricidad, que expresaremos como energía potencial y no como trabajo.

$$EP = EK' + EP'$$
$$EK' = EP - EP'$$
$$EK' = qV - qV'$$
$$EK' = (-e)V - (-e)V'$$
$$EK' = e\,(V' - V)$$

El electrón se mueve a un potencial más alto, de modo que $V' > V$ y la diferencia $(V' - V)$ es positiva. Dado que el campo eléctrico va de mayor potencial a menor potencial, el electrón se mueve hacia la izquierda.

Para un protón (con carga positiva),

$$EK' = qV - qV'$$
$$EK' = (+e)V - (+e)V'$$
$$EK' = e\,(V - V')$$

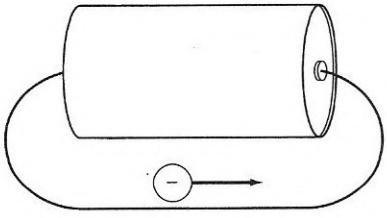
El protón se mueve a un potencial menor, de modo que $V' < V$ y la diferencia $(V - V')$ es positiva. El protón se mueve hacia la derecha.

*LECCIÓN*

Todo se mueve hacia un sitio en el que tiene menor energía potencial (y más energía cinética). Esto no siempre equivale a moverse hacia un sitio de menor potencial.

**EJEMPLO**

¿Cuánto trabajo puede realizar un electrón al moverse entre las terminales de una batería de 1.5 V?



Utilicemos la conservación de la energía.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$

Las cargas no tienen energía cinética en un principio, de modo que $EK = 0$. Cuanta más energía cinética tengan al final tanto menor trabajo habrán podido realizar, de modo que para máximo trabajo $EK' = 0$. La energía potencial es $EP = qV$.

$$qV + W = qV'$$
$$W = qV' - qV$$
$$W = q(V' - V)$$

Los electrones se mueven del lado de menor voltaje (negativo) de una batería al de mayor voltaje (positivo), de modo que el potencial final es mayor que el inicial. La diferencia de potenciales o voltajes es de 1.5 V; una batería es un dispositivo que crea una diferencia de potencial constante.

$$W = (-e)(1.5\ \text{V})$$
$$W = (-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5\ \text{V})$$
$$W = -2.4 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Éste es el trabajo realizado sobre un electrón. El trabajo efectuado por el electrón es $+2.4 \times 10^{-19}$ J.

Un coulomb de carga es $1/(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 6 \times 10^{18}$ electrones, de modo que el trabajo que un coulomb de carga realiza es

$$(6 \times 10^{18}) \times (2.4 \times 10^{-19}\ \text{J}) = 1.5\ \text{J}$$

Un coulomb es una carga grande, y a veces tenemos cargas tan pequeñas como un solo electrón. Cuando se mueve mucha carga hay una gran cantidad de energía implicada,

$$1\ \text{C} \times 1\ \text{V} = 1\ \text{J}$$

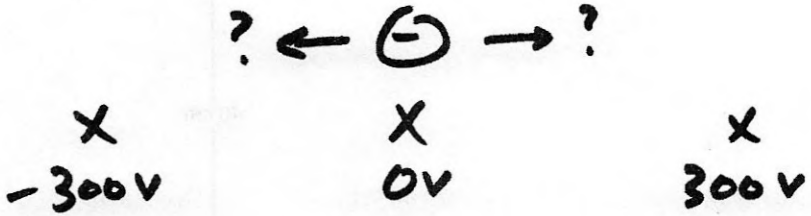
pero cuando sólo se mueve una carga pequeña hay una cantidad reducida de energía implicada,

$$1\ e \times 1\ \text{V} = 1\ \text{eV}$$

donde eV es el símbolo de "electrón-volt".

**EJEMPLO**

¿Cuál es la energía cinética que adquiere un electrón al moverse desde tierra hasta un sitio a 300 V? ¿Y al moverse desde tierra hasta un sitio a – 300 V?




Antes dijimos que "tierra" es un conductor grande, tan grande que siempre es neutro. Cuando se utiliza el potencial, "tierra" es el nombre que se da al sitio en que el potencial es cero ($V_{\text{tierra}} = 0$). El contexto debe indicar en qué sentido se usa el término.

Utilizando la conservación de la energía,

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$
$$0 + (-e)(0) + 0 = EK' + (-e)(300\text{ V})$$
$$EK' = (e)(300\text{ V}) = 300\text{ eV}$$

Cuando se mueve desde tierra hasta un sitio en que el potencial es – 300 V,

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$
$$0 + (-e)(0) + 0 = EK' + (-e)(-300\text{ V})$$
$$EK' = -(e)(300\text{ V}) = -300\text{ eV}$$

¿Cómo puede ser negativa la energía cinética? El electrón no irá ahí por sí mismo: tendríamos que empujarlo, realizando trabajo sobre él, para llevarlo desde tierra hasta – 300 V.

**EJEMPLO**

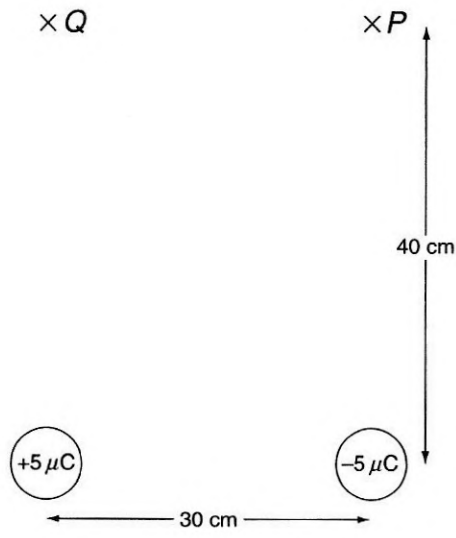
¿Cuál es el trabajo necesario para mover un protón de $P$ a $Q$?

Utilicemos la conservación de la energía.

$$EK + EP + W = EK' + EP'$$
$$0 + (+e)V_P + W = 0 + (+e)V_Q$$
$$W = (+e)V_Q - (+e)V_P$$

Necesitamos encontrar el potencial en $P$ y $Q$. En un ejemplo anterior encontramos el potencial en $P$.

$$V_P = -22\,500\text{ V} = -22.5\text{ kV}$$




Determinemos el potencial en $Q$ del mismo modo.

$$V_Q = V_{+5} + V_{-5}$$

$$V_Q = \frac{k(+5\ \mu C)}{(40\ \text{cm})} + \frac{k(-5\ \mu C)}{(50\ \text{cm})}$$

$$V_Q = \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(+5 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.40\ \text{m})} + \frac{(9 \times 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2)(-5 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.50\ \text{m})}$$

$$V_Q = 22500\ \text{V} = 22.5\ \text{kV}$$

$$W = (+e)(V_Q - V_P)$$

$$W = (+e)[(+22\ 500\ \text{V}) - (-22\ 500\ \text{V})]$$

$$W = (+1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(+45\ 000\ \text{V})$$

$$W = +7.2 \times 10^{-15}\ \text{J} \quad \text{o} \quad +45\ 000\ \text{eV}$$

Si el trabajo fuera negativo, la carga habría ido de $P$ a $Q$ por sí misma.

*LECCIÓN*

Para utilizar el potencial, aplicamos la conservación de la energía con $EP = qV$.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- Utilice la conservación de la energía con $EP = qV$.
- Todo objeto intenta moverse al sitio en que tiene menor energía potencial. En el caso de cargas negativas ese lugar es de un potencial más alto.
- La diferencia de potencial entre dos puntos es

$$\Delta V = \int -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Para un campo eléctrico constante esto es igual a

$$\Delta V_{\text{campo constante}} = Ed$$

Para una carga puntual es

$$V_{\text{carga puntual}} = \frac{kq}{R}$$

- Para cargas múltiples, trate de usar la superposición, encontrando el potencial creado por cada carga y sumando. El potencial no tiene dirección ni sentido, de modo que no sume vectorialmente los potenciales.

CAPÍTULO 11

# CIRCUITOS

En el capítulo anterior vimos que cuando una carga pasa de una energía potencial alta a otra baja, sobre ella realizan un trabajo las fuerzas eléctricas. Es posible convertir este trabajo en otras formas de energía. Si bien una carga individual no realiza mucho trabajo, una corriente de muchas cargas puede efectuar una cantidad sustancial. Nos gustaría poder convertir este trabajo en música o alguna otra forma útil de energía.

Primero nos concentraremos en circuitos sencillos con resistores o capacitores y una sola batería. La técnica para analizar estos circuitos es directa aunque francamente repetitiva. Como de costumbre cuando se habla de física, se trata de usar un lenguaje claro, en este caso evitando los pronombres.

Los circuitos más avanzados requieren de herramientas más avanzadas. Utilizando las ideas que desarrollemos con los circuitos más sencillos abordaremos algunos ejemplos más interesantes.

## 11.1 RESISTORES Y CAPACITORES

Si conectamos las dos terminales de una batería con un alambre conductor, habrá una corriente de la terminal con mayor potencial a la de menor potencial. En realidad, la corriente consta de electrones (negativos) que se mueven de un potencial menor a uno mayor. Pero solemos hablar de cargas positivas que se mueven de mayor potencial a menor potencial.

¿Qué es lo que determina la cantidad de corriente? La propiedad de los materiales de oponerse a la corriente es la resistividad ($\rho$), y los dispositivos hechos de materiales resistivos tienen resistencia ($R$) y se denominan resistores. (Podríamos usar nombres más originales, pero serían más difíciles de recordar.) En un diagrama, los resistores se representan por medio de líneas quebradas.

Un campo eléctrico en un material conductor causa una corriente. Un campo eléctrico también produce un cambio en el potencial. Se deduce que la corriente a través de un resistor se relaciona con la diferencia de voltaje entre las dos terminales. Esta relación es la **ley de Ohm**.

$$V = IR$$

La resistencia se mide en ohms. Para evitar confundir la letra O mayúscula con un cero, el símbolo para ohms es la letra griega omega mayúscula (1 Ω = 1 V/A).

Consideremos también la energía utilizada en el resistor. Cada carga utiliza una energía que depende del cambio de potencial. Si la diferencia de voltaje entre los dos

extremos del resistor es de 6 volts, o 6 joules por coulomb, entonces cada coulomb de carga usa 6 joules de energía para pasar a través del resistor. A mayor corriente, más rápido pasan los coulombs de carga, y más rápido se convierte la energía en calor dentro del resistor. De este modo la potencia, o rapidez con que se emplea energía en el resistor, es

$$P = IV$$

Tenemos cuatro variables ($R$, $V$, $I$ y $P$) y dos ecuaciones. Si conocemos dos cualesquiera de las cuatro variables podemos encontrar las otras dos usando nuestras dos ecuaciones.

**EJEMPLO**

Una bombilla consume 100 watts de potencia cuando se conecta a una fuente de 120 volts. ¿Cuál es la resistencia de la bombilla?

Encontramos la resistencia a partir de la ley de Ohm, usando el voltaje y la corriente. No conocemos esta última, pero podemos encontrarla a partir de $P = IV$.

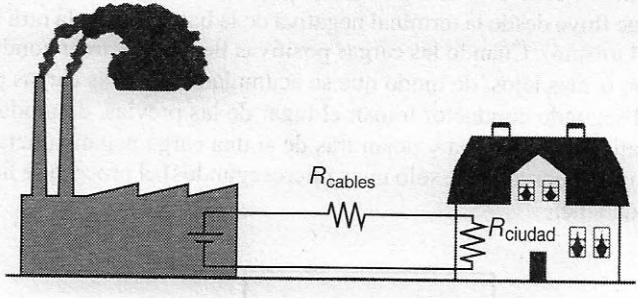
$$V = IR \quad \text{y} \quad P = IV$$

$$\mathrm{R} = \frac{V}{I} = \frac{V}{P/V} = \frac{V^2}{P}$$

$$\mathrm{R} = \frac{(120\ \mathrm{V})^2}{(100\ \mathrm{W})} = 144\ \Omega$$

**EJEMPLO**

Una planta eléctrica suministra 100 MW de energía eléctrica a una gran ciudad, con voltaje de 50 kV. La energía viaja por cables con resistencia total de 2 Ω. ¿Cuánta potencia se pierde en los cables?




Tenemos dos resistores en este problema, los cables y la ciudad. Normalmente la resistencia de los cables no es tan grande para tener que preocuparse por ella, pero las líneas que parten de la planta eléctrica son tan largas que su resistencia es apreciable. En este caso 50 kV es la diferencia de voltaje entre los dos extremos de la resistencia de la

ciudad $R_{\text{ciudad}}$. De modo similar, 100 MW es la potencia en $R_{\text{ciudad}}$. El único valor que conocemos para los cables es su resistencia, $R_{\text{cable}}$.

| | Cable | | Ciudad |
|---|---|---|---|
| $V$ | | | 50 kV |
| $I$ | | $\leftrightarrow$ | |
| $R$ | 2 Ω | | |
| $P$ | ? | | 100 MW |

La corriente que llega a la ciudad pasa por los cables, de modo que las corrientes deben ser iguales. Si utilizamos la información para obtener $I_{\text{ciudad}}$, que es igual a $I_{\text{cable}}$, entonces conocemos dos de las cuatro variables para el cable.

$$P_{\text{ciudad}} = I_{\text{ciudad}}\, V_{\text{ciudad}}$$

$$100 \text{ MW} = I_{\text{ciudad}}(50 \text{ kV})$$

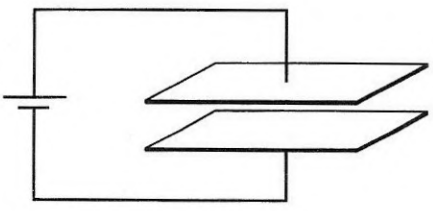
$$I_{\text{ciudad}} = \frac{100 \text{ MW}}{50 \text{ kV}} = \frac{100 \times 10^6 \text{ W}}{50 \times 10^3 \text{ V}} = 2000 \text{ A}$$

$$P_{\text{cable}} = I_{\text{cable}}\, V_{\text{cable}} = I_{\text{cable}}\, (I_{\text{cable}}\, R_{\text{cable}}) = I^2_{\text{cable}}\ \ R_{\text{cable}}$$

$$P_{\text{cable}} = (2000 \text{ A})^2\, (2\ \Omega) = 8 \times 10^6 \text{ W} = 8 \text{ MW}$$

De la potencia total, 8% se pierde en los cables. Para evitarlo, la compañía eléctrica suministra la electricidad a voltajes mucho más elevados, como 350 kV. A siete veces el voltaje, la corriente es un séptimo, y la potencia en los cables es 1/49 o 98% menor; sólo se pierde 0.2%.

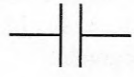
Imagine que tomamos dos piezas planas grandes de metal, como las bandejas para hornear galletas, y las colocamos paralelas entre sí pero sin que se toquen. Luego conectamos las dos terminales de una batería a las dos bandejas. Una carga positiva fluye desde la terminal positiva de la batería a la primera bandeja (en realidad es la carga negativa la que fluye desde la terminal negativa de la batería hasta la otra bandeja, pero el efecto es el mismo). Cuando las cargas positivas llegan al primer conductor (bandeja), no pueden ir más lejos, de modo que se acumulan ahí. Otras cargas positivas provenientes del segundo conductor toman el lugar de las previas, de modo que van a la terminal negativa de la batería y dejan tras de sí una carga negativa neta. Después de un momento (que podría ser de sólo unos microsegundos) el proceso se hace más lento hasta que se detiene.



¿Y si desconectáramos la batería de las bandejas? ¿Podrían las cargas en los conductores prever lo que planeamos y correr de vuelta a la batería? No, las cargas están atrapadas en los conductores. Ahora podríamos conectar los conductores a las dos terminales de una bombilla (o de un resistor) y el exceso de carga positiva circularía por la bombilla, creando una corriente momentánea, y se reuniría con el exceso de carga negativa en el otro conductor. Hemos creado un dispositivo para almacenar pequeñas cantidades de carga. La cantidad de carga $Q$ que puede almacenarse en un capacitor con capacitancia $C$ es

$$Q = CV$$

En las placas del capacitor se almacenan cantidades iguales de carga positiva y negativa, y $Q$ es el valor absoluto de una de estas dos cargas. La unidad de capacitancia es el farad ($F$), y el símbolo para un capacitor son dos líneas paralelas de la misma longitud. Compárelo con el símbolo de una batería, que consiste en dos líneas paralelas de distinta longitud (la más larga siempre corresponde al potencial más alto).



Se requiere trabajo para almacenar carga en un capacitor. Dado que toda esta energía puede extraerse más tarde, es posible expresarla como una energía potencial

$$U_{\text{CAP}} = \frac{1}{2} QV$$

Esta ecuación es similar a la que teníamos para la energía potencial de una carga ($U = qV$), excepto por el valor $\frac{1}{2}$. Una manera de entender esta diferencia consiste en imaginar que apilamos libros. Si comenzamos con una cierta cantidad de libros del mismo tamaño sobre el piso, no se necesita ningún trabajo para poner el primero sobre el piso. El segundo libro requiere un poco de trabajo, dado que debe elevarse una altura igual al espesor del primer libro. El tercer libro requiere aún más trabajo, y así sucesivamente, hasta que el último libro consume la mayor cantidad de trabajo. Podríamos sumar el trabajo necesario para cada libro, o multiplicar el número de libros por el trabajo *promedio* requerido para cada libro. El promedio es el trabajo para colocar el libro de en medio, el cual se levanta a la mitad de la altura de la pila. De modo similar, no se requiere trabajo para colocar la primera carga en el capacitor, dado que sin carga tampoco tiene voltaje. La segunda carga requiere algún trabajo, la tercera requiere más, y la última requiere el mayor trabajo. El trabajo total es la carga multiplicada por el voltaje promedio, que es la mitad del voltaje final. Utilice $U = qV$ para cargas individuales, pero use $U = \frac{1}{2}QV$ cuando cada carga sucesiva requiera más trabajo que la previa.

Como en el caso de los resistores, tenemos cuatro variables ($C$, $V$, $Q$ y $U$) y dos ecuaciones. Si conocemos dos cualesquiera de las cuatro variables, podemos encontrar las otras dos usando nuestras dos ecuaciones. Tanto para resistores como para capacitores, tenemos la característica del dispositivo, la diferencia de voltaje entre las dos terminales, la carga (o carga por tiempo = corriente), y la energía (o energía por tiempo = potencia).

**EJEMPLO**

¿Cuál es la energía que puede almacenarse en un capacitor de 0.10 $\mu$F el cual tiene un voltaje máximo de 16 V?

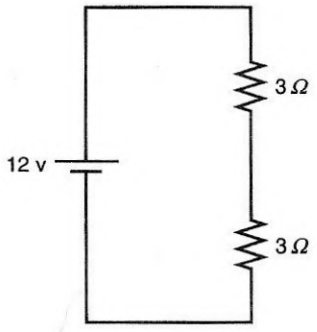
La energía es

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(CV)V = \frac{1}{2}CV^2$$

$$U = \frac{1}{2}(0.10\ \mu\text{F})(16\ \text{V})^2 = 12.8\ \mu\text{J}$$

## 11.2 EN SERIE Y EN PARALELO

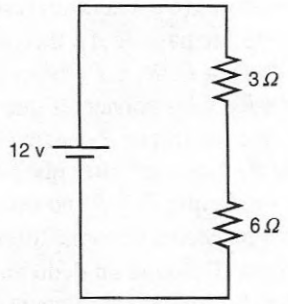
¿Qué ocurre si se tienen dos (o más) resistores en el mismo circuito, como se ilustra? No puede acumularse carga en ningún punto del circuito, pues muy pronto crearía un enorme campo eléctrico. Por tanto, la corriente que pasa por los dos resistores debe ser la misma. Asimismo, la suma de los voltajes en los dos resistores debe ser de 12 V; esto es, cada coulomb de carga utiliza parte de sus 12 J de energía para pasar por el primer resistor, y el resto para pasar por el segundo.




Dado que ambos tienen la misma resistencia y la misma corriente, deben tener el mismo voltaje. Estos dos voltajes suman 12 V. Dos números iguales que suman doce deben ser 6 V y 6 V. Cada coulomb de carga consume 6 J de energía para pasar por el primer resistor y 6 J de energía para pasar por el segundo. La diferencia de voltaje entre las dos terminales de cada resistor es de 6 V. La corriente que pasa por cada resistor es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{6\ \text{V}}{3\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

¿Y si los resistores no son iguales? Digamos que el resistor de abajo es de 6 Ω. Las corrientes que pasan por los dos resistores siguen siendo iguales (iguales entre sí, no iguales que antes). Tome nota de este importante punto: *si se cambia el circuito, se cambian las corrientes*. El voltaje (diferencia de potencial entre las dos terminales) del




resistor de arriba es $V_3 = I(3\ \Omega)$ y el voltaje del resistor de abajo es $V_6 = I(6\ \Omega)$. La suma de los dos voltajes es 12 V, de modo que

$$12\text{V} = V_3 + V_6 = I(3\ \Omega) + I(6\ \Omega) = I(9\ \Omega)$$

$$I = \frac{12\ \text{V}}{9\ \Omega}\ 1.3\ \text{A}$$

El voltaje a través del resistor de abajo (la diferencia de potencial entre sus dos extremos, que también se llama caída de voltaje) es

$$V_6 = I_6 R_6 = (1.3\ \text{A})(6\ \Omega) = 8\ \text{V}$$

Podríamos usar un atajo, como en el problema anterior. Las corrientes son iguales y el resistor de 6 Ω tiene el doble de resistencia que el de 3 Ω, así que debe tener el doble de voltaje. (Piense en dos números cuya suma es 12 y uno de los cuales es el doble del otro.) El voltaje del resistor de arriba es de 4 V y el voltaje del resistor de abajo es de 8 V. (Usualmente los números no son tan fáciles de determinar como en este caso.)

Cuando dos dispositivos se conectan de modo que deben tener la misma corriente, decimos que están en serie. Dos resistores en serie actúan igual que un solo resistor de resistencia

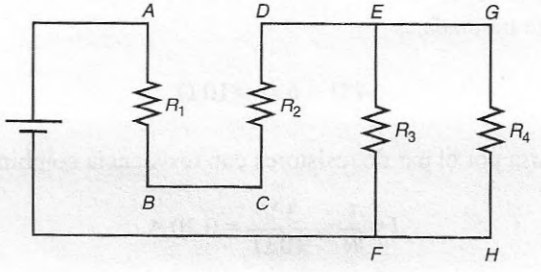
$$R_S = R_1 + R_2$$

De modo similar, cuando dos dispositivos se conectan de modo que deben tener el mismo voltaje, decimos que están en paralelo. Dos resistores en paralelo actúan igual que un solo resistor que tiene la resistencia

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Estas reglas se invierten para los capacitores

$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{y} \quad C_P = C_1 + C_2$$



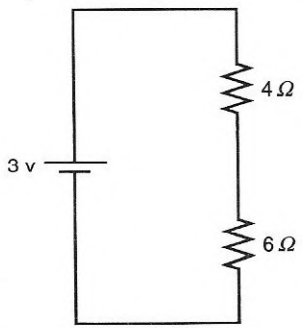
¿Cómo determinamos si dos resistores (o capacitores) están en serie? Consideremos $R_1$ y $R_2$ en la figura anterior. La corriente pasa de $A$ a través de $R_1$ a $B$. De aquí, las cargas sólo pueden ir a $C$ y a través de $R_2$ a $D$. $R_1$ y $R_2$ están en serie porque las cargas que pasan por $R_1$ deben ir después a $R_2$, y las corrientes que pasan por las dos resistencias deben ser iguales. Las cargas que pasan por $R_2$ hacia el punto $D$ pueden ir a $F$ a través de $R_3$ o bien a $H$ a través de $R_4$. Las corrientes que pasan por $R_2$ y $R_3$ no tienen que ser iguales necesariamente, de modo que $R_2$ y $R_3$ no están en serie.

¿Cómo determinamos si dos resistores (o capacitores) están en paralelo? Consideremos $R_3$ y $R_4$ en la figura anterior. Coloque un dedo en cada extremo de $R_3$. La diferencia de voltaje entre sus dedos es igual a la diferencia de voltaje entre las terminales de $R_3$, o el voltaje a través de $R_3$. Ahora intente mover los dedos, pero sólo a lo largo de alambres y no de elementos circuitales, como resistores, capacitores o baterías. Si al hacerlo puede hacer que sus dedos queden en los dos extremos de $R_4$, entonces a través de $R_3$ y $R_4$ se tiene el mismo voltaje y están en paralelo (lo están, y usted debe ser capaz de comprobarlo de esta manera). ¿Están $R_3$ y $R_2$ en paralelo? Podemos llevar un dedo de $E$ a $D$ pero no podemos ir de $F$ a $C$. Sólo podríamos hacerlo saltando de un alambre a otro vecino (lo cual viola la regla anterior) o pasando a través de la batería y de $R_1$ (que tampoco se permite). Por tanto, $R_3$ y $R_2$ no están en paralelo. Aunque ambos se representan verticalmente, de modo que desde el punto de vista geométrico son paralelos, no lo son desde el punto de vista eléctrico.

Hemos visto que $R_2$ y $R_3$ no están en serie ni en paralelo. No necesariamente dos resistores cualesquiera deben estar en una de las dos configuraciones.

**EJEMPLO**

Determine la corriente y el voltaje para el resistor de 4 Ω.




Toda la carga que pasa por el resistor de 4 Ω debe pasar después por el resistor de 6 Ω, de modo que están en serie.

Su resistencia combinada es

$$4\ \Omega + 6\ \Omega = 10\ \Omega$$

La corriente que pasa por el par de resistores con resistencia combinada de 10 Ω es

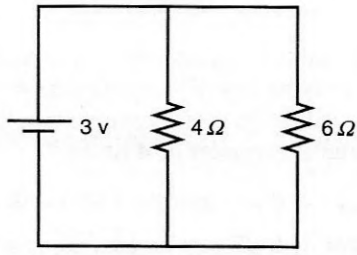
$$I = \frac{V}{R} = \frac{3\ \text{V}}{10\ \Omega} = 0.30\ \text{A}$$

Esta corriente pasa tanto por el resistor de 4 Ω como por el de 6 Ω, de modo que la corriente a través del resistor de 4 Ω es de 0.30 A y la diferencia de voltaje entre las dos terminales del resistor de 4 Ω es

$$V = IR = (0.30\ \text{A})(4\ \Omega) = 1.2\ \text{V}$$

**EJEMPLO**

Determine la corriente y el voltaje para el resistor de 4 Ω, y la corriente de la batería.




Ponga un dedo en cada terminal del resistor de 4 Ω y muévalos a la izquierda hasta que toquen las terminales de la batería: el resistor de 4 Ω está en paralelo con la batería. Por tanto, ambos deben tener el mismo voltaje, y el voltaje en el resistor de 4 Ω es de 3 V. La corriente que pasa por el resistor de 4 Ω es

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{3\ \text{V}}{4\ \Omega} = 0.75\ \text{A}$$

De modo similar, el resistor de 6 Ω está en paralelo con la batería, tiene 3 V entre sus terminales y por él pasa una corriente de

$$I_6 = \frac{V_6}{R_6} = \frac{3\ \text{V}}{6\ \Omega} = 0.50\ \text{A}$$

La corriente que pasa por la batería es la suma de las corrientes de los resistores:

$$I_\mathcal{E} = I_4 + I_6 = 0.75\ \text{A} + 0.50\ \text{A} = 1.25\ \text{A}$$

De manera alternativa, los resistores están en paralelo (comience con los dedos en el resistor de 4 Ω y muévalos sólo sobre los alambres hasta tocar las terminales del resistor de 6 Ω).

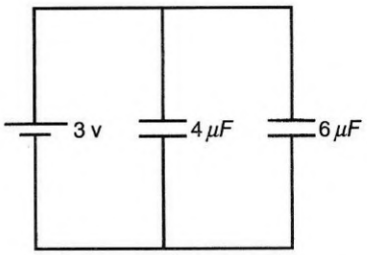
$$\frac{1}{R_{\text{par}}} = \frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = \frac{6\ \Omega}{24\ (\Omega)^2} + \frac{4\ \Omega}{24\ (\Omega)^2}$$

$$R_{\text{par}} = \frac{24\ (\Omega)^2}{10\ \Omega} = 2.4\ \Omega$$

$$I_\mathcal{E} = \frac{V}{R_{\text{par}}} = \frac{3\ \text{V}}{2.4\ \Omega} = 1.25\ \text{A}$$

**EJEMPLO**

Determine la carga y el voltaje para el capacitor de 4 $\mu$F, y la carga total que fluye desde la batería.




Ponga un dedo en cada terminal del capacitor de 4 $\mu$F y muévalos a la izquierda hasta que toquen las terminales de la batería. El capacitor de 4 $\mu$F está en paralelo con la batería. Por lo tanto, ambos deben tener el mismo voltaje, y el voltaje en el capacitor de 4 $\mu$F es de 3 V. La carga en el capacitor de 4 $\mu$F es

$$Q_4 = C_4V_4 = (4\ \mu\text{F})(3\ \text{V}) = 12\ \mu\text{C}$$

De modo similar, el capacitor de 6 $\mu$F está en paralelo con la batería, tiene 3 V entre sus terminales y tiene una carga de

$$Q_6 = C_6V_6 = (6\ \mu\text{F})(3\ \text{V}) = 18\ \mu\text{C}$$

La carga total que fluye desde la batería es la suma de las cargas que llegan a cada uno de los capacitores:

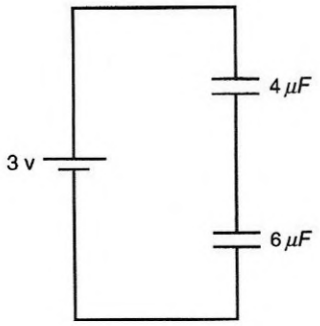
$$Q_\mathcal{E} = Q_4 + Q_6 = 12\ \mu\text{C} + 18\ \mu\text{C} = 30\ \mu\text{C}$$

De manera alternativa, los capacitores están en paralelo (comience con los dedos en el capacitor de 4 $\mu$F y muévalos sólo sobre los alambres hasta tocar las terminales del capacitor de 6 $\mu$F)

$$C_{\text{par}} = 4\ \mu\text{F} + 6\ \mu\text{F} = 10\ \mu\text{F}$$
$$Q_\mathcal{E} = C_{\text{par}}V_{\text{par}} = (10\ \mu\text{F})(3\ \text{V}) = 30\ \mu\text{C}$$

**EJEMPLO**

Determine la carga y el voltaje para el capacitor de 4 $\mu$F.



Toda la carga que pasa por el capacitor de 4 $\mu$F debe pasar después por el de 6 $\mu$F, de modo que están en serie. La capacitancia combinada es

$$\frac{1}{C_{\text{par}}} = \frac{1}{4\ \mu\text{F}} + \frac{1}{6\ \mu\text{F}} = \frac{6\ \mu\text{F}}{24\ (\mu\text{F})^2} + \frac{4\ \mu\text{F}}{24\ (\mu\text{F})^2}$$

$$C_{\text{par}} = \frac{24\ (\mu\text{F})^2}{10\ \mu\text{F}} = 2.4\ \mu\text{F}$$

La carga en el par de capacitores con capacitancia equivalente a 2.4 $\mu$F es

$$Q_{\text{par}} = C_{\text{par}} V_{\text{par}} = (2.4\ \mu\text{F})(3\ \text{V}) = 7.2\ \mu\text{C}$$

Esta carga pasa tanto por el capacitor de 4 $\mu$F como por el de 6 $\mu$F, de modo que la carga en el capacitor de 4 $\mu$F es de 7.2 $\mu$C y la carga en el capacitor de 6 $\mu$F es de 7.2 $\mu$C. La diferencia de voltaje entre las dos terminales del capacitor de 4 $\mu$F es

$$Q = CV$$
$$7.2\ \mu\text{C} = (4\ \mu\text{F})V$$
$$V = 1.8\ \text{V}$$

*LECCIÓN*

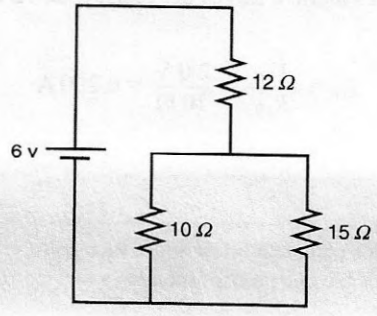
En serie significa la misma corriente; en paralelo significa el mismo voltaje.

## 11.3 CIRCUITOS CON UNA SOLA BATERÍA

Cuando se trabaja con circuitos más complicados, es común que deba distinguirse entre conexiones en serie y en paralelo varias veces. La ley de Ohm puede aplicarse a cualquier resistor, pero también puede aplicarse a un par de ellos en serie o a cualquier grupo de resistores. De modo similar, la ecuación $Q = CV$ puede aplicarse a cualquier capacitor, pero también puede aplicarse a un par de ellos en serie o a cualquier grupo de capacitores. Es importante llevar el control de cuál valor se aplica a cuál elemento circuital o grupo de elementos.

**EJEMPLO**

¿Cuál es la corriente que pasa por el resistor de 10 $\Omega$?



¿El voltaje entre las terminales del resistor de 10 Ω es igual al voltaje de la batería (6 V)? Coloque un dedo a cada lado del resistor y trate de moverlos a lo largo de los alambres, sin cruzar elementos circuitales, hasta que queden a ambos lados de la batería. Es posible ir del extremo inferior del resistor hasta el extremo inferior de la batería, pero para hacer lo mismo con los extremos superiores se necesitaría cruzar por el resistor de 12 Ω, lo cual no está permitido. El resistor de 10 Ω no está en paralelo con la batería, y por tanto estos dos elementos no necesariamente tienen el mismo voltaje.

¿El resistor de 10 Ω está en serie con el resistor de 12 Ω? La corriente que pasa por el segundo podría pasar por el primero pero también podría pasar por el resistor de 15 Ω, de modo que los resistores de 10 Ω y 12 Ω no están en serie.

¿El resistor de 10 Ω está en paralelo con el resistor de 15 Ω? Repita la prueba de los dedos, comenzando en las terminales del resistor de 10 Ω. Podrá llevar los dedos desde ahí hasta las dos terminales del resistor de 15 Ω moviéndolos sólo sobre los alambres, sin cruzar ningún elemento circuital. Están en paralelo, y podemos reemplazarlos con un solo resistor.

$$\frac{1}{R_{\text{par}}} = \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega} = \frac{15\ \Omega}{150\ (\Omega)^2} + \frac{10\ \Omega}{150\ (\Omega)^2}$$

$$R_{\text{par}} = \frac{150\ (\Omega)^2}{25\ \Omega} = 6.0\ \Omega$$

Este par está en serie con el resistor de 12 Ω: la corriente que pasa por el resistor de 12 Ω debe pasar por el par, ya sea a través del resistor de 10 Ω o del resistor de 15 Ω. El resistor de 12 Ω y el par 10/15 pueden reemplazarse con un solo resistor.

$$R_{\text{trío}} = R_{12} + R_{\text{par}} = 12\ \Omega + 6\ \Omega + 18\ \Omega$$

La corriente que pasa por el trío es la misma que pasa por la batería:

$$I_{\mathcal{E}} = I_{\text{trío}} = \frac{V_{\text{trío}}}{R_{\text{trío}}} = \frac{6\ \text{V}}{18\ \Omega} = 0.33\ \text{A}$$

Toda la corriente que pasa por el trío pasa por el resistor de 12 Ω, de modo que $I_{12} = I_{\text{trío}}$, pero sólo parte de esta corriente pasa por el resistor de 10 Ω. Podemos encontrar el voltaje en el par 10/15

$$V_{\text{par}} = I_{\text{par}} R_{\text{par}} = (0.33\ \text{A})(6\ \Omega) = 2.0\ \text{V}$$

Dado que el resistor de 10 Ω y el de 15 Ω están en paralelo,

$$V_{10} = V_{15} = V_{\text{par}} = 2.0\ \text{V}$$

Una vez que conocemos el voltaje a través del resistor de 10 Ω, podemos encontrar la corriente que pasa por él.

$$I_{10} = \frac{V_{10}}{R_{10}} = \frac{2.0\ \text{V}}{10\ \Omega} = 0.290\ \text{A}$$

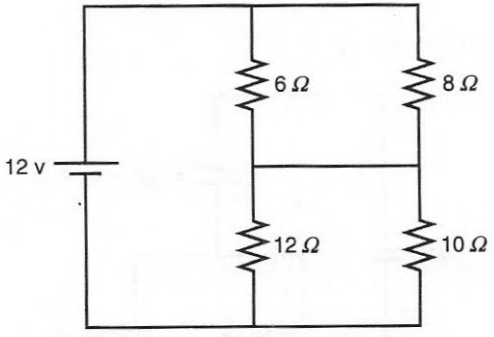
*LECCIÓN*

Utilice la prueba de los dedos para determinar si dos elementos circuitales están conectados en serie o en paralelo. Es posible que no correspondan a una u otra configuración.

Tal vez le parezca extraño que en el ejemplo anterior, $V_{12} + V_{10} + V_{15} = 4\text{ V} + 2\text{ V} + 2\text{ V} = 8\text{ V} \neq V_{\mathcal{E}}$. ¿Debe la suma de los voltajes de los resistores ser igual al voltaje de la batería? Consideremos una pregunta similar: en un gran edificio comercial hay cuatro escaleras que van del primer piso al segundo; entonces, ¿está el segundo piso a cuatro pisos del primero? No, porque cada persona sólo usa una de las escaleras, no todas ellas, para ir del primer piso al segundo. De modo similar, cada carga pasa por el resistor de 10 Ω o por el de 15 Ω, pero no por ambos, al recorrer el circuito.

**EJEMPLO**

¿Cuál es el voltaje entre las terminales del resistor de 6 Ω?




¿El resistor de 6 Ω está en serie con el de 12 Ω? La corriente que pasa por el primero podría ir al segundo pero también podría dirigirse a la derecha y pasar por el de 8 Ω o el de 10 Ω, de modo que los resistores de 6 Ω y de 12 Ω no están en serie.

Utilice la prueba de los dedos con el resistor de 6 Ω: comience con un dedo en cada terminal y muévalos sobre los alambres hasta llegar a los extremos de otro elemento circuital. El resistor de 8 Ω está en paralelo con el de 6 Ω. La resistencia del par superior es

$$\frac{1}{R_{\text{sup}}} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{8\ \Omega} = \frac{8\ \Omega}{48\ (\Omega)^2} + \frac{6\ \Omega}{48\ (\Omega)^2}$$

$$R_{\text{sup}} = \frac{48\ (\Omega)^2}{14\ \Omega} = 3.43\ \Omega$$

De modo similar, el resistor de 12 Ω y el de 10 Ω están en paralelo.

$$\frac{1}{R_{\text{inf}}} = \frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega} = \frac{10\ \Omega}{120\ (\Omega)^2} + \frac{12\ \Omega}{120\ (\Omega)^2}$$

$$R_{\text{inf}} = \frac{120\ (\Omega)^2}{22\ \Omega} = 5.45\ \Omega$$

Los resistores del par superior están en paralelo. La corriente sale de la batería, pasa por el par superior (los resistores han sido sustituidos por un solo resistor) y luego pasa por el par inferior (por una u otra vía) y vuelve a la batería.

$$R_{\text{todos}} = R_{\text{sup}} + R_{\text{inf}} = 3.43\ \Omega + 5.45\ \Omega = 8.88\ \Omega$$

$$I_{\mathcal{E}} = I_{\text{todos}} = \frac{V_{\text{todos}}}{R_{\text{todos}}} = \frac{12\ \text{V}}{8.88\ \Omega} = 1.35\ \text{A}$$

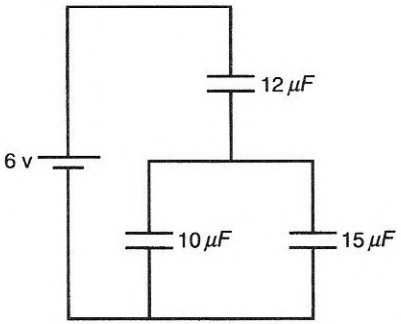
No toda esta corriente pasa por el resistor de 6 Ω; pasa por el par superior.

$$V_6 = V_{\text{sup}} = I_{\text{sup}} R_{\text{sup}} = (1.35\ \text{A})(3.43\ \Omega) = 4.6\ \text{V}$$

El voltaje en el resistor de 8 Ω también es de 4.6 V.

**EJEMPLO**

¿Cuál es la carga en el capacitor de 10 $\mu$F?




El capacitor de 10 $\mu$F no está en paralelo con la batería, de modo que el voltaje a través de él no es de 6 V. Tampoco está en serie con el capacitor de 12 $\mu$F. La carga que pasa por el capacitor de 12 $\mu$F podría pasar por el capacitor de 10 $\mu$F pero también podría hacerlo por el de 15 $\mu$F, de modo que los capacitores de 10 $\mu$F y 12 $\mu$F no están en serie.

¿El capacitor de 10 $\mu$F está en paralelo con el capacitor de 15 $\mu$F? Haga la prueba de los dedos, comenzando en las terminales del capacitor de 10 $\mu$F. Puede mover los dedos a los dos extremos del capacitor de 15 $\mu$F desplazándolos sólo sobre los alambres, sin atravesar ningún elemento circuital. Están en paralelo y podemos reemplazarlos con un solo capacitor.

$$C_{\text{par}} = C_{10} + C_{15} = 10\ \mu\text{F} + 15\ \mu\text{F} = 25\ \mu\text{F}$$

Este par está en serie con el capacitor de 12 $\mu$F. La corriente que pasa por el capacitor de 12 $\mu$F debe pasar por el par, ya sea a través del capacitor de 10 $\mu$F o del de 15 $\mu$F. El capacitor de 12 $\mu$F y el par 10/15 pueden reemplazarse con un solo capacitor.

$$\frac{1}{C_{\text{trío}}} = \frac{1}{12\ \mu\text{F}} + \frac{1}{25\ \mu\text{F}} = \frac{25\ \mu\text{F}}{300\ (\mu\text{F})^2} + \frac{12\ \mu\text{F}}{300\ (\mu\text{F})^2}$$

$$C_{\text{trío}} = \frac{300\ (\mu\text{F})^2}{37\ \mu\text{F}} = 8.1\ \mu\text{F}$$

La carga en el trío de capacitores de 8.1 $\mu$F es

$$Q_{\text{trío}} = C_{\text{trío}} V_{\text{trío}} = (8.1\ \mu\text{F})(6\ \text{V}) = 48.6\ \mu\text{C}$$

Esta carga pasa tanto por el capacitor de 12 $\mu$F como por el par de 25 $\mu$F, de modo que la carga en el capacitor de 12 $\mu$F es de 48.6 $\mu$C y la carga en el capacitor de 25 $\mu$F es de 48.6 $\mu$C.

El voltaje a través del par es

$$\begin{aligned} Q_{\text{par}} &= C_{\text{par}} V_{\text{par}} \\ 48.6\ \mu\text{C} &= (25\ \mu\text{F}) V_{\text{par}} \\ V_{\text{par}} &= 1.94\ \text{V} \end{aligned}$$

Dado que el capacitor de 10 $\mu$F y el de 15 $\mu$F están en paralelo,

$$V_{10} = V_{15} = V_{\text{par}} = 1.94\ \text{V}$$

La carga en el capacitor de 10 $\mu$F es

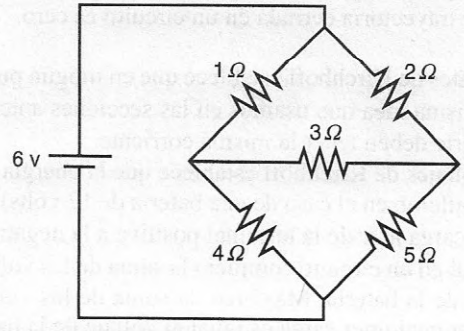
$$Q_{10} = C_{10} V_{10} = (10\ \mu\text{F})(1.94\ \text{V}) = 19.4\ \mu\text{C}$$

*LECCIÓN*

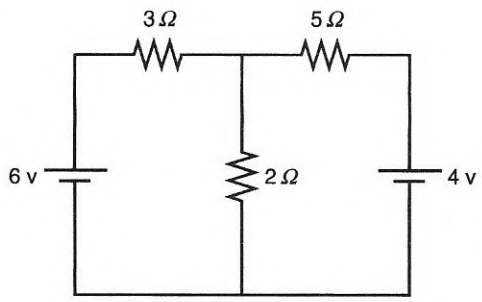
Busque combinaciones en serie y en paralelo. Trabaje de esta manera hasta que encuentre una combinación para la cual conozca el voltaje.

**EJEMPLO**

¿Cuál es la corriente que pasa por el resistor de 5 Ω en cada circuito?




En el primer circuito no hay dos resistores que estén en serie o en paralelo, así que no podemos combinar resistores. Ni el resistor de 5 Ω ni ningún otro está en paralelo con la batería, de modo que no conocemos el voltaje para ninguno de los resistores. Dado que no podemos reducir el circuito a algo más sencillo, no podemos resolverlo (todavía).




Para el segundo circuito, la corriente que pasa por el resistor de 5 Ω podría ir al resistor de 2 Ω pero también podría ir al de 3 Ω, de modo que el resistor de 5 Ω y el de 2 Ω no están en serie. Ninguno de los resistores está en serie o en paralelo, así que no podemos simplificar el circuito. (El resistor de 5 Ω está en serie con la batería de 4 V, pero no tenemos un reemplazo para este par.)

El voltaje en el resistor de 5 Ω no es de 4 V porque dicho resistor no está en paralelo con la batería de 4 V; no conocemos el voltaje en el resistor de 5 Ω.

Ambos circuitos son demasiado complejos para resolverlos sólo con nuestra técnica de circuitos en serie y en paralelo.

## 11.4 REGLAS DE KIRCHHOFF

Kirchhoff propuso dos reglas para analizar circuitos:

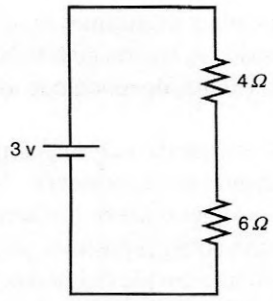
- **Regla de las corrientes (o regla de nodos):** la corriente que llega a cualquier punto o elemento en un circuito es la misma que sale de ese punto o elemento.
- **Regla de los voltajes (o regla de mallas):** la suma de los cambios de voltaje a lo largo de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es cero.

La regla de las corrientes de Kirchhoff establece que en ningún punto puede acumularse carga. Ésta es la misma idea que usamos en las secciones anteriores para decir que dos dispositivos en serie deben tener la misma corriente.

La regla de los voltajes de Kirchhoff establece que la energía que tiene cada carga (12 joules por cada coulomb en el caso de una batería de 12 volts) debe ser utilizada de manera exacta por la carga al ir de la terminal positiva a la negativa de la batería. Éste es el motivo por el cual en un circuito complejo la suma de los voltajes de los resistores no es igual al voltaje de la batería. Más bien, la suma de los voltajes a lo largo de la trayectoria seguida por cualquier carga es igual al voltaje de la batería.

### EJEMPLO

Encuentre la corriente y el voltaje para el resistor de 4 Ω.




Si comenzamos abajo a la izquierda y avanzamos en el sentido de las manecillas del reloj, lo primero que encontramos es la batería. Estamos desplazándonos de la terminal de menor voltaje a la de mayor voltaje, de modo que ascendemos por el voltaje de la batería, que es de 3 V.

Continuamos hasta llegar al resistor de 4 Ω. ¿Cuál es el cambio de voltaje cuando cruzamos por éste? El voltaje de una terminal a la otra del resistor de 4 Ω es igual a la corriente multiplicada por la resistencia. No conocemos la corriente, así que le asignamos el símbolo $i$ y elegimos el sentido descendente como el positivo. La corriente circula del potencial mayor al menor, así que a medida que avanzamos con la corriente vamos "cuesta abajo", de mayor voltaje a menor voltaje; por lo tanto, el cambio de voltaje es $-(4\ \Omega)i$.

A continuación llegamos al resistor de 6 Ω. El voltaje a través de éste es igual a la corriente multiplicada por la resistencia. Los dos resistores están en serie, de modo que la corriente en el resistor de 6 Ω también es $i$ descendente. El cambio de voltaje es $-(6\ \Omega)i$.

Ahora estamos en donde comenzamos, así que la regla de los voltajes dice que la suma de los cambios de voltaje es cero.

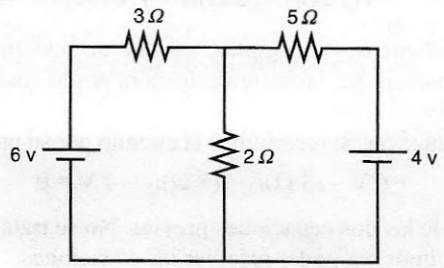
$$+3\text{ V} - (4\ \Omega)i - (6\ \Omega)i = 0$$
$$+3\text{ V} - (4\ \Omega + 6\ \Omega)i = 0$$
$$i = \frac{3\text{ V}}{(4\ \Omega + 6\ \Omega)} = 0.30\text{ A}$$

El voltaje en el resistor de 4 Ω es la resistencia multiplicada por la corriente a través del resistor.

$$V_4 = I_4 R_4 = (0.30\text{ A})\,(4\ \Omega) = 1.2\text{ V}$$

**EJEMPLO**

¿Cuál es la corriente que pasa por el resistor de 5 Ω?



Si comenzamos abajo a la izquierda y avanzamos en el sentido de las manecillas del reloj, lo primero que encontramos es la batería de 6 V. Nos desplazamos de la terminal de menor voltaje a la de mayor voltaje, de modo que ascendemos por el voltaje de la batería, que es de 6 V.

Continuamos hasta llegar al resistor de 3 Ω. El voltaje de una terminal a la otra del resistor de 3 Ω es igual a la corriente por la resistencia. No conocemos la corriente, así que le asignamos el símbolo $i_3$ y elegimos el sentido hacia la derecha como el positivo. Podríamos elegir cualquier sentido como el positivo; se trata tan sólo de un sistema de coordenadas cualquiera. La corriente circula del potencial mayor al menor, así que a medida que avanzamos con la corriente vamos "cuesta abajo", de mayor voltaje a menor voltaje; por tanto el cambio de voltaje es $-(3\ \Omega)i_3$. Si elegimos como positivo el sentido "incorrecto", entonces $i_3$ será negativa y el cambio de voltaje será positivo.

A continuación llegamos al resistor de 2 Ω. La corriente que pasa por el resistor de 3 Ω podría ir al resistor de 2 Ω o al de 5 Ω, de modo que los resistores de 3 Ω y de 2 Ω no están en serie. La corriente a través del resistor de 2 Ω no necesariamente es igual a la que pasa por el de 3 Ω, así que necesitamos un nuevo símbolo $i_2$ para representar la corriente que pasa por el resistor de 2 Ω. Elegimos el sentido descendente como el de $i_2$ positivo, y el cambio de voltaje es $-(2\ \Omega)i_2$.

Continuando en el sentido de las manecillas del reloj, llegamos al sitio de partida. La suma de los cambios de voltaje debe ser cero.

$$+6\text{V} - (3\ \Omega)i_3 - (2\ \Omega)i_2 = 0$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas, así que no podemos resolverla aún. Necesitamos otra ecuación.

Hagamos otro recorrido (ciclo), comenzando en la parte media inferior y avanzando en el sentido de las manecillas del reloj hacia arriba. Lo primero que encontramos es el resistor de 2 Ω, pero esta vez vamos contra la corriente (ya hemos elegido el sentido positivo y debemos apegarnos a nuestra elección). La corriente circula del potencial mayor al menor, así que avanzamos de menor a mayor potencial, o de manera ascendente en voltaje. El cambio de voltaje a través del resistor de 2 Ω es $+(2\ \Omega)i_2$.

Damos vuelta a la derecha y llegamos al resistor de 5 Ω. La corriente que pasa por el resistor de 5 Ω es distinta de la que pasa por cualquiera de los otros resistores, así que necesitamos un nuevo símbolo $i_5$. Elegimos el sentido hacia la derecha como el positivo y el cambio de voltaje es $-(5\ \Omega)i_5$.

Por último llegamos a la batería de 4 V. Nos movemos del lado de mayor voltaje al de menor voltaje, de modo que el cambio de voltaje es −4 V. Hemos vuelto al punto de partida, así que la suma de los cambios de voltaje es cero.

$$+(2\ \Omega)i_2 - (5\ \Omega)i_5 - 4\ \text{V} = 0$$

Esta ecuación también tiene dos incógnitas, así que no podemos resolverla aún. Las incógnitas no son las mismas que en la otra ecuación, por lo cual no podemos resolverlas como ecuaciones simultáneas.

Necesitamos otra ecuación. Si recorremos el circuito por su parte exterior obtenemos

$$+6\ \text{V} - (3\ \Omega)i_3 - (5\ \Omega)i_5 - 4\ \text{V} = 0$$

que es igual a la suma de las dos ecuaciones previas. No se trata de una ecuación independiente, así que seguimos sin poder resolver las ecuaciones.

Apliquemos entonces la regla de las corrientes. Observando la parte media superior del circuito, vemos que la suma de las corrientes que van hacia dentro es igual a la suma de las corrientes que van hacia fuera:

$$i_3 = i_2 + i_5$$

Esto nos da tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{cases} +6\text{ V} - (3\ \Omega)i_3 - (2\ \Omega)i_2 = 0 \\ +(2\ \Omega)i_2 - (5\ \Omega)i_5 - 4\text{ V} = 0 \\ i_3 = i_2 + i_5 \end{cases}$$

$$+6\text{ V} - (3\ \Omega)(i_2 + i_5) - (2\ \Omega)i_2 = 0$$

$$+6\text{ V} - (3\ \Omega)i_5 - (5\ \Omega)i_2 = 0$$

$$+(5\ \Omega)i_2 = +6\text{ V} - (3\ \Omega)i_5$$

$$+(2\ \Omega)\left(\frac{+6\text{ V} - (3\ \Omega)i_5}{+(5\ \Omega)}\right) - (5\ \Omega)i_5 - 4\text{ V} = 0$$

$$+2.4\text{ V} - (1.2\ \Omega)i_5 - (5\ \Omega)i_5 - 4\text{ V} = 0$$

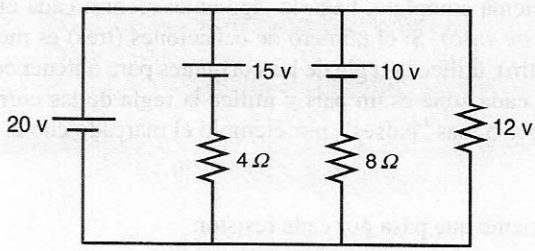
$$-(6.2\ \Omega)i_5 = 1.6\text{ V}$$

$$i_5 = -0.26\text{ A}$$

El signo negativo indica que la corriente a través del resistor de 5 Ω va en el sentido negativo, opuesto al sentido que elegimos como positivo (va hacia la izquierda).

**EJEMPLO**

¿Cuál es la corriente que pasa por el resistor de 12 Ω?




Podríamos recorrer cada uno de los tres circuitos más pequeños:

$$\begin{cases} +20\text{ V} - 15\text{ V} - (4\ \Omega)i_4 = 0 \\ +(4\ \Omega)i_4 + 15\text{ V} - 10\text{ V} - (8\ \Omega)i_8 = 0 \\ +(8\ \Omega)i_8 + 10\text{ V} - (12\ \Omega)i_{12} = 0 \end{cases}$$

Podríamos resolver estas ecuaciones para encontrar $i_{12}$.

De manera alternativa, podríamos recorrer la parte exterior del circuito:

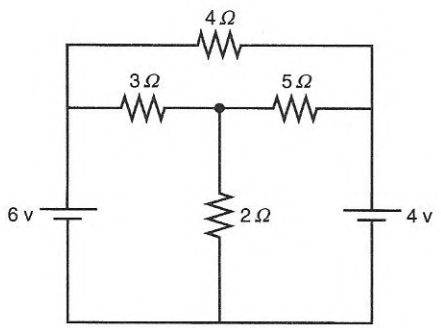
$$+20\ \text{V} - (12\ \Omega)i_{12} = 0$$

Esta ecuación puede resolverse de manera inmediata:

$$-(12\ \Omega)i_{12} = -20\ \text{V}$$
$$i_{12} = 1.67\ \text{A}$$

*LECCIÓN*

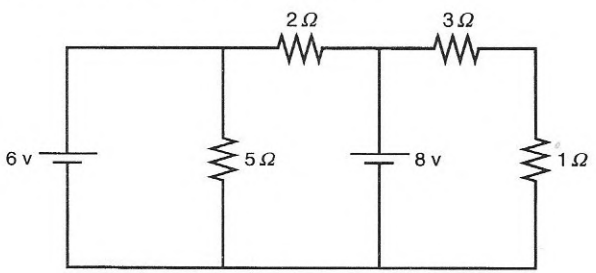
Busque circuitos parciales con el menor número de variables; resolver las ecuaciones podría ser sencillo.




A veces es difícil obtener el mismo número de variables y de ecuaciones independientes. Considere el circuito de arriba. Si el objetivo es encontrar la corriente que pasa por el resistor de 4 Ω, entonces podemos recorrer la parte exterior, en un circuito parcial sin más resistores, y resolver la ecuación de inmediato. Si debemos encontrar algo más, entonces necesitaremos un sistema completo de ecuaciones. Si no está seguro de si tiene ya un sistema completo, haga lo siguiente: recorra cada circuito parcial (hay tres de ellos en este caso). Si el número de ecuaciones (tres) es menor que el número de variables (cuatro), utilice la regla de las corrientes para obtener ecuaciones suficientes. Imagine que cada zona es un país y utilice la regla de las corrientes en los sitios donde colindan tres o más "países", por ejemplo el marcado con el punto negro.

**EJEMPLO**

Encuentre la corriente que pasa por cada resistor.



Aplique la regla de los dedos al resistor de 5 Ω y verá que está en paralelo con la batería de 12 V. El voltaje a través del resistor de 5 Ω es el mismo que el voltaje entre las terminales de la batería de 12 V.

$$i_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{12\ \text{V}}{5\ \Omega} = 2.4\ \text{A}$$

La corriente va de mayor voltaje de la batería a menor voltaje de la batería, o hacia abajo.

Para el resistor de 2 Ω, buscamos un circuito parcial con la menor cantidad posible de resistores. Encontramos uno que incluye las dos baterías y elegimos hacia la derecha como el sentido positivo.

$$+12\ \text{V} - (2\ \Omega)i_2 - 8\ \text{V} = 0$$
$$-(2\ \Omega)i_2 = -4\ \text{V}$$
$$i_2 = +2\ \text{A}$$

El resistor de 3 Ω está en serie con el resistor de 1 Ω, de modo que ambos actúan como un solo resistor de 4 Ω. Este par de 4 Ω está en paralelo con la batería de 8 V, de modo que

$$i_3 = i_1 = i_{\text{par}} = \frac{8\ \text{V}}{4\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

de la terminal de mayor voltaje de la batería a la de menor voltaje.

## 11.5 CIRCUITOS COMBINADOS: R-C Y R-L

Existen otros dos elementos circuitales básicos (hasta el momento tenemos batería, alambre, resistor y capacitor). Un interruptor es un dispositivo para cortar o interrumpir el paso de la corriente, de modo que con un interruptor "cerrado" el circuito está completo y con un interruptor "abierto" el circuito está incompleto. Un inductor es una bobina o solenoide, y se representa por medio de una fila de semicírculos.

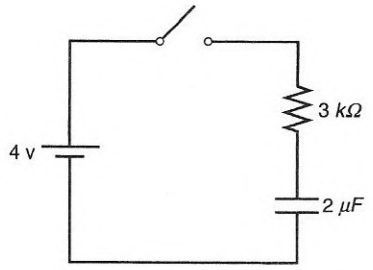
El voltaje a través de un resistor obedece la ley de Ohm: el voltaje es proporcional a la corriente en un instante dado. El voltaje que pasa por un capacitor depende de la carga, que es la suma de toda la corriente que ha fluido por el capacitor:

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t$$

El voltaje entre las terminales de un inductor depende del modo en que cambia la corriente que pasa por el inductor; en cierto sentido, depende de la corriente que pasará por el inductor en el futuro:

$$V_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

donde $L$ es la inductancia, que se mide en henrys (H). En algunos textos de física esta ecuación tiene un signo negativo para que concuerde con la ecuación para el voltaje inducido, pero ello resulta inapropiado para analizar circuitos.




Consideremos lo que ocurre cuando combinamos un resistor y un capacitor en un circuito. En el instante en que cerramos el interruptor (el cual se muestra abierto), la carga en el capacitor es cero: aún no ha habido tiempo para que alguna corriente fluya por él. Dado que la carga es cero, el voltaje entre las terminales del capacitor es cero. La regla de los voltajes nos dice que el voltaje entre las terminales del resistor es de 4 V, de modo que la corriente en el circuito es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\text{ V}}{3\text{ k}\Omega} = 1.3\text{ mA}$$

El capacitor se carga a razón de 1.3 mC cada segundo. A medida que la carga del capacitor aumenta, así lo hace el voltaje entre sus terminales, y el voltaje entre las terminales del resistor disminuye, por lo que la corriente decrece. Con el tiempo, el voltaje en el capacitor llega a 4 V y la corriente cesa.

Si usamos la regla de los voltajes, obtenemos

$$(4\text{ V}) - (3\text{ k}\Omega)i - \frac{1}{(2\ \mu\text{F})}\int_0^t i(t')\,dt' = 0$$

donde $t$ es el momento para el cual deseamos conocer la corriente, pero ya lo hemos usado de modo que no puede ser nuestra variable de integración, así que elegimos otro símbolo, $t'$. La solución de la ecuación diferencial que resulta es

$$i(t) = (1.3\text{ mA})e^{-t/\tau} \quad \text{donde} \quad \tau = RC = (3\text{ k}\Omega)(2\ \mu\text{F}) = 6\text{ ms}$$

Siempre que combinemos un capacitor o un inductor con un resistor, obtenemos una corriente que depende del tiempo de manera exponencial. No expondremos en este libro la solución de estas ecuaciones. En cambio, consideraremos el modo de analizar los casos extremos: inmediatamente antes e inmediatamente después de que se ha cerrado el interruptor.

Para que la carga de un capacitor cambie, por él debe fluir una corriente. Para que la carga cambie de manera instantánea, esa corriente debe ser infinita. Dado que no podemos tener una corriente infinita, la carga de un capacitor no puede cambiar instantáneamente, así que el voltaje entre sus terminales tampoco puede cambiar de manera instantánea. El voltaje puede cambiar, y podemos medir la razón de cambio instantánea (por oposición a la razón de cambio promedio), pero no puede ocurrir un salto discreto; esto es, no puede ser que el voltaje sea de 2 V y un instante después sea de 4 V sin haber pasado por 3 V.

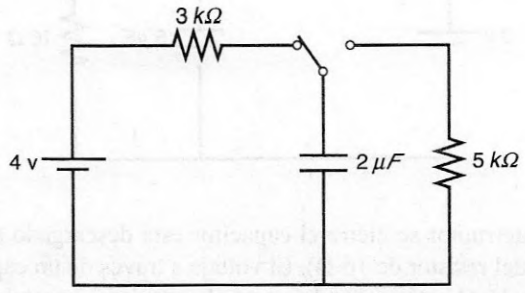
Para un inductor, si la corriente cambiara de manera instantánea, entonces el voltaje tendría que ser infinito, lo que no es posible. Si se intenta apagar un circuito que

tiene un inductor, la interrupción de la corriente causa un voltaje tan alto entre las terminales del interruptor que la carga salta entre ellas, produciendo una chispa.

Por otro lado, si esperamos a que la situación se estabilice hasta quedar en un estado estacionario, entonces nada debe cambiar. Para que pase corriente por cualquier capacitor, la carga debe variar, y también el voltaje. Para que haya voltaje en un inductor, la corriente debe variar. Así, después de un largo tiempo, el voltaje en cualquier inductor debe ser cero y la corriente en cualquier capacitor debe ser cero.

**EJEMPLO**

El interruptor se conecta a la izquierda para que el capacitor se cargue por completo. Después el interruptor se mueve a la derecha. ¿Cuál es la corriente que pasa por cada resistor inmediatamente después de mover el interruptor a la derecha?




Una vez que el interruptor se mueve a la derecha, el resistor de 3 kΩ deja de ser parte de un circuito completo: no hay una trayectoria cerrada para el circuito que incluya el resistor de 3 kΩ. Por lo tanto, la corriente que pasa por éste debe ser cero.

Después de mover el interruptor a la derecha, el resistor de 5 kΩ está en paralelo con el capacitor (aplique la regla de los dedos). El voltaje entre las terminales del resistor de 5 kΩ debe ser igual al voltaje entre las terminales del capacitor. La corriente que pasa por el resistor de 5 kΩ es el voltaje del capacitor dividido por la resistencia.

El voltaje en el capacitor no puede cambiar de manera instantánea; se requiere tiempo para que la carga fluya. Así, el voltaje en el capacitor inmediatamente después de que el interruptor se mueve a la derecha es igual al voltaje inmediatamente antes de moverlo. En ese instante estaba en un circuito con la batería y el resistor de 3 kΩ. Dado que ese circuito estuvo conectado por un tiempo largo ("para que el capacitor se cargue por completo"), la corriente en el circuito de la izquierda era cero inmediatamente antes de mover el interruptor. Puesto que no había corriente, no había voltaje en el resistor, y el voltaje del capacitor era igual al voltaje de la batería

$$+(4\text{ V}) - (3\text{ k}\Omega)(0\text{ A}) - V_C = 0$$

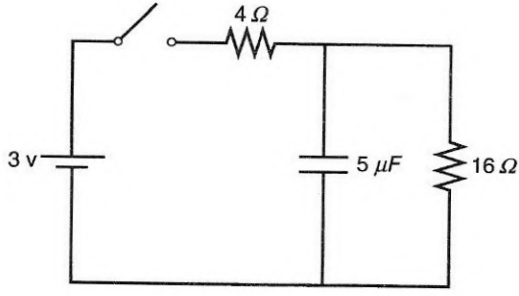
$$V_C = 4\text{ V}$$

$$I_{5K} = \frac{V_{5k}}{R_{5k}} = \frac{V_C}{R_{5k}} = \frac{4\text{ V}}{5\text{ k}\Omega} = 0.8\text{ mA}$$

Este valor no depende de la capacitancia del capacitor. Sin embargo, si se usa un capacitor más grande, se requerirá más tiempo para que el capacitor se descargue a través del resistor de 5 kΩ. En este circuito, la descarga será de 99% en 50 ms.

**EJEMPLO**

¿Cuál es la corriente que pasa por el resistor de 16 Ω: a) inmediatamente después de que se cierra el interruptor, b) un largo tiempo después de que se cierra el circuito, y c) inmediatamente después de que el interruptor vuelve a abrirse?




Antes de que el interruptor se cierre el capacitor está descargado (cualquier carga se habrá ido a través del resistor de 16 Ω). El voltaje a través de un capacitor sin carga es cero. El resistor de 16 Ω está en paralelo con el capacitor, de modo que los voltajes a través de ellos son iguales y el voltaje a través del resistor de 16 Ω es cero.

Inmediatamente después de que se cierra el interruptor, la carga en el capacitor aún es cero, pues no ha tenido tiempo para cambiar porque no ha habido tiempo para que la carga fluya todavía. Dado que el capacitor está descargado y tiene cero volts entre sus terminales, hay cero volts en el resistor de 16 Ω. Por el resistor de 4 Ω fluyen 0.75 A de corriente, pero nada por el de 16 Ω, de modo que toda la corriente pasa por el capacitor, cargándolo.

Después de que ha pasado un tiempo largo, el capacitor está completamente cargado. Si hubiera una corriente a través del capacitor entonces su carga estaría cambiando, de modo que ya no fluye corriente por él. Toda la corriente que pasa por el resistor de 4 Ω va al resistor de 16 Ω; ambos están ahora de hecho en serie (sólo cuando el capacitor está completamente cargado). Hay una corriente de

$$I = \frac{V}{R} = \frac{3\ \text{V}}{4\ \Omega + 16\ \Omega} = 0.15\ \text{A}$$

a través de los dos resistores.

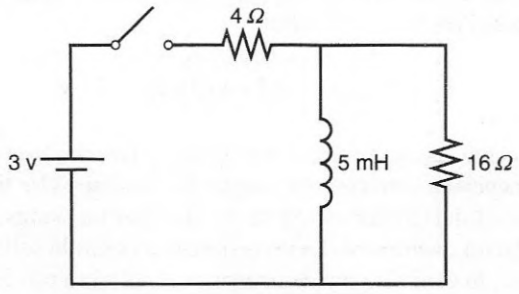
El interruptor está abierto ahora. El voltaje en el capacitor no puede cambiar de manera instantánea, de modo que es el mismo que tenía después de que el interruptor estuviera cerrado por un largo tiempo. El voltaje entre las terminales del capacitor es igual al voltaje en el resistor de 16 Ω, que en el momento de abrir el interruptor era:

$$V_C = V_{16} + I_{16}R_{16} = (0.15\ \text{A})(16\ \Omega) = 2.4\ \text{V}$$

Después de que el interruptor se abre, el voltaje en el capacitor y el resistor de 16 Ω sigue siendo de 2.4 V, de manera que la corriente a través de este último es aún de 0.15 A. Disminuirá de manera exponencial hasta cero con una constante de tiempo ($1/e$ tiempo) de 80 $\mu$s, por lo que la corriente disminuirá hasta 1% de su valor inicial en 0.4 ms.

**EJEMPLO**

¿Cuál es la corriente que pasa por el resistor de 16 Ω: a) inmediatamente después de que se cierra el interruptor, b) un largo tiempo después de que se cierra, y c) inmediatamente después de que vuelve a abrirse?




Antes de que el interruptor se cierre no hay corriente en ningún lugar del circuito. Inmediatamente después de que se cierra, la corriente que pasa por el inductor aún es cero, pues no ha tenido tiempo para cambiar. Puesto que la corriente que pasa por el inductor es cero, toda la corriente que pasa por el resistor de 4Ω va al resistor de 16 Ω. Ambos están ahora de hecho en serie (sólo cuando la corriente del inductor es cero). Hay una corriente de

$$I = \frac{V}{R} = \frac{3\text{ V}}{4\ \Omega + 16\ \Omega} = 0.15\text{ A}$$

a través de los dos resistores.

Aunque la corriente que pasa por el inductor es cero, está cambiando. La razón de cambio de esta corriente es

$$L\frac{di}{dt} = V_L = V_{16} + I_{16}R_{16}$$

$$(5\text{ mH})\frac{di}{dt} = (0.15\text{ A})(16\ \Omega) = 2.4\text{ V}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{2.4\text{ V}}{5\text{ mH}} = 480\text{ V/H} = 480\text{ A/s}$$

Conforme pasa más corriente por el inductor, menos va al resistor de 16 Ω, por lo que el voltaje entre las terminales de éste disminuye; lo mismo ocurre con el voltaje en el inductor y la razón de cambio disminuye. Con el tiempo la corriente que pasa por el inductor alcanza un valor estable y deja de cambiar. Dado que la corriente del inductor

no varía, el voltaje a través del inductor es cero, de modo que el voltaje en el resistor de 16 Ω es cero y la corriente que pasa por éste es cero. Aún hay una corriente de

$$I = \frac{V}{R} = \frac{3\ \text{V}}{4\ \Omega} = 0.75\ \text{A}$$

que pasa por el resistor de 4 Ω y el inductor.

Ahora el interruptor está abierto. La corriente que pasa por el inductor no puede cambiar de manera instantánea, de manera que es la misma que luego de que el interruptor estuvo cerrado por un largo tiempo, o sea 0.75 A. Esta corriente no puede pasar por el resistor de 4 Ω, sino sólo por el de 16 Ω. La corriente que pasa por el resistor de 16 Ω inmediatamente después de que el interruptor se abre es de 0.75 A y el voltaje entre las terminales del resistor de 16 Ω es

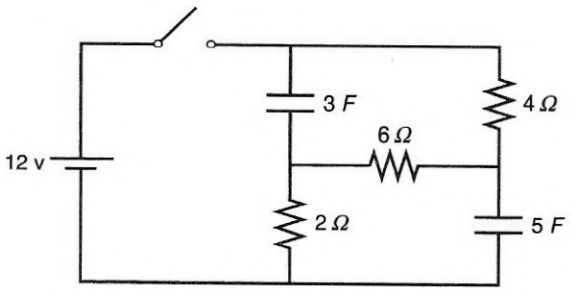
$$V_{16} = I_{16}R_{16} = (0.75\ \text{A})(16\ \Omega) = 12\ \text{V}$$

que, sorprendentemente, es mayor que el voltaje de la batería. Esta corriente disminuirá de manera exponencial a cero con una constante de tiempo ($1/e$ tiempo) de 0.31 ms.

Después de que el interruptor estuviera cerrado por un tiempo largo, la corriente que pasa por el inductor disminuyó. La inversión de su sentido sería un cambio instantáneo en la corriente, lo cual sólo puede ocurrir si el voltaje a través del inductor fuera infinito. Por lo tanto, después de que el interruptor se abre la corriente se dirige hacia abajo, así que la corriente que pasa por el resistor de 16 Ω va hacia arriba. La terminal inferior del resistor de 16 Ω tiene 12 V más que la superior.

**EJEMPLO**

¿Cuál es la corriente que pasa por el resistor de 6 Ω: a) inmediatamente después de que se cierra el interruptor, y b) un largo tiempo después de que se cierra el interruptor?




Antes de que el interruptor se cierre, los capacitores no tienen carga y el voltaje de cada uno de ellos es cero. Inmediatamente después de que el interruptor se cierra, la carga en los capacitores sigue siendo cero, pues aún no ha habido tiempo para que la carga fluya. Los capacitores y el interruptor actúan (de manera momentánea) como alambres: no importa cuánta corriente fluya por ellos el voltaje entre sus terminales es cero. Intente la prueba de los dedos con el resistor de 6 Ω. Dado que es posible pasar sobre los capacitores y el interruptor, se encontrará que el resistor de 6 Ω está (momentáneamen-

te) en paralelo con la batería. El voltaje a través del resistor de 6 Ω es de 12 V y la corriente que pasa por él (de izquierda a derecha) es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12\ \text{V}}{6\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

Por el capacitor de 3 F fluirá una corriente de 8 A, y una de 5 A por el capacitor de 5 F.

Después de que ha pasado un tiempo largo, los capacitores están completamente cargados. Si hubiera una corriente a través de alguno de ellos entonces su carga estaría cambiando, de modo que no fluye corriente por ellos.

Toda la corriente que pasa por el resistor de 4 Ω va al resistor de 6 Ω y luego al de 2 Ω. Los resistores están ahora de hecho en serie (sólo cuando los capacitores están completamente cargados). Hay una corriente de

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12\ \text{V}}{4\ \Omega + 6\ \Omega + 2\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

a través de los resistores, la cual fluye de derecha a izquierda a través del resistor de 6 Ω.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

- Las ecuaciones para resistores y capacitores pueden usarse para elementos circuitales individuales o para grupos de elementos similares.

$$V = IR \quad \text{(ley de Ohm)}$$

$$P = IV$$

$$R_S = R_1 + R_2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$Q = CV$$

$$U_{CAP} = \frac{1}{2} QV$$

$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{y} \quad C_P = C_1 + C_2$$

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

- **Regla de las corrientes:** las corrientes que entran y salen de cualquier punto o elemento en el circuito son iguales.
- **Regla de los voltajes:** la suma de los cambios de voltaje a través de cualquier trayectoria cerrada en el circuito es cero.
- Busque combinaciones en serie y en paralelo para simplificar el circuito.
- Dos dispositivos en serie tienen la misma corriente.
- Dos dispositivos en paralelo tienen el mismo voltaje.

# ÍNDICE


Aceleración 8, 125
  centrípeta 74
  constante 10
  tangencial 130, 133
Alambre 228
Ampere, ley de 197
Amperímetro 202
Antiparalelo 18
Atwood, máquina de 50, 99, 141
Batería 223
Biot-Savart, ley de 182
Campo 168
Campo eléctrico 168-169
Campo magnético 182, 184
Cantidad de movimiento 106
Capacitancia 231
Capacitor 230
Carga 160
Choque 107
  elástico 114
  inelástico 108, 115
Componentes 18
Conductor 160
Confusión 1
Conservación 84
Corriente 177
Corriente inducida 204
Coulomb, ley de 162
Desaceleración 8
Descarga 250
Diagramas de cuerpo libre 30
Ejes *véase Sistema de coordenadas*
Electroscopio 166
Energía 84
Energía cinética 85, 145
Energía mecánica 85
Energía potencial 89
  de un resorte 93
  eléctrica 211, 221, 231
  gravitacional 89
Estado estacionario 249
Estado sin fuerza normal 76
Estado sin peso 76
Estática 152
Física 1
Flujo 190
Fuerza 30
Fuerza centrípeta 74
Fuerza de fricción 56
Fuerza eléctrica 162
Fuerza gravitacional 31
Fuerza magnética 177
Fuerza normal 35
Gauss, ley de 190
Gravitación, fuerza de 31
Impulso 106
Inductancia 247
Inductor 247
Interruptor 247
Kirchhoff, leyes de 242
La pequeña Grace 33, 92
Momento de inercia 136, 138
Momento de torsión 134
Movimiento balístico 23
Newton, leyes de 30
Ohm, ley de 228
Órbita 81
Peso *véase Fuerza gravitacional*
Pitágoras, teorema de 19
Potencia 229
Potencial 212
Producto cruz 177
Producto punto 213
Regla de la mano derecha 177
Resistencia 228
Resistividad 228
Resistor 228
Sistema de coordenadas 47
Solenoide 201
Superficie gaussiana 191
Superposición 221
Tensión 33
Trabajo 85
Unidades
  ampere 176
  coulomb 162
  electrón-volt 224
  farad 231
  henry 247
  joule 85
  kilogramo 30
  kilowatt-hora 3
  newton 30
  ohm 228
  radián 130
  tesla 177
  volt 211
  watt 3
Vector 18
Velocidad 16
Voltaje 211
Voltaje inducido 203

LA EDICIÓN, COMPOSICIÓN, DISEÑO E IMPRESIÓN DE ESTA OBRA FUERON REALIZADOS
BAJO LA SUPERVISIÓN DE GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, COL. CENTRO. MÉXICO, D.F. C.P. 06040
12401950030ABRIL2011873DP9212I

## Comienza tu curso de física con el pie derecho.

Para muchos estudiantes, resolver problemas de física es escollo difícil de salvar. Pero con perseverancia y con las herramientas de estudio adecuadas, es posible aprender el lenguaje de esta ciencia hasta dominarlo como una segunda lengua. El libro que tienes en tus manos te ayudará a comprender conceptos fundamentales de física, resolver diversos tipos de problemas y concentrarte en lo que necesitas para lograr un desempeño óptimo.

Éstas son las estrategias:

COMPRENDER LOS CONCEPTOS
*La física como segunda lengua* se concentra en una selección de temas de física en los que se utiliza cálculo a fin de proporcionarte bases sólidas para el estudio de la materia. Estos temas se explican con un lenguaje claro y fácil de entender.

DESCOMPONER LOS PROBLEMAS EN PASOS SIMPLES
*La física como segunda lengua* te enseña a abordar los problemas de manera más eficiente y eficaz. Aprenderás a reconocer patrones comunes en los problemas de física, a descomponer éstos en pasos fáciles de abordar, y a aplicar las técnicas apropiadas. El libro te lleva paso a paso por la resolución de numerosos ejemplos.

MEJORAR TUS HABILIDADES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS
*La física como segunda lengua* te ayudará a desarrollar las habilidades que necesitas para resolver una amplia variedad de problemas. Aprenderás estrategias para ahorrar tiempo en la solución de problemas y a evitar errores potenciales.

Este libro es un excelente apoyo para los estudiantes que inician un curso de física o que han tenido un desempeño bajo en la materia.

ÁREA: FÍSICA
ISBN 978-607-05-0308-5
9 786070 503085

GRUPO NORIEGA EDITORES

limusa@noriegaeditores.com
www.noriega.com.mx